

ANÁLISE NUMÉRICA DE UMA ONDA ELETROMAGNÉTICA EM MEIOS DIELÉTRICOS MÓVEIS USANDO O MÉTODO FDTD

Rodrigo César Fonseca da Silva¹

Marcelo da Silva Vieira²

Pedro Carlos de Assis Júnior³

Elder Eldervitch Carneiro de Oliveira⁴

Tales Augusto Carvalho de Barros Raimundo⁵

RESUMO

O estudo da eletrodinâmica em meios em movimento representa um fator fundamental no desenvolvimento de comunicação entre dispositivos móveis. Nesse sentido, as devidas correções nas Equações de Maxwell são necessárias usando os princípios da Teoria da Relatividade Especial. Este trabalho tem como objetivo apresentar resultados de simulações numéricas unidimensionais da propagação de ondas eletromagnéticas monocromáticas e linearmente polarizadas, através de um meio dielétrico, com índice de refração η , que se move com uma velocidade constante não relativística em relação a um determinado referencial de laboratório. A onda eletromagnética escolhida tem a forma de o pulso gaussiano, em particular. As equações de Maxwell-Minkowski são numericamente aproximadas utilizando como base as características do método numérico das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD) e assim é possível verificar que o movimento do meio defasa a onda em relação ao referencial em repouso, e também que no meio móvel, o vetor de Poynting é defasado em relação aos campos.

Palavras-chave: Equações de Maxwell-Minkowski. Eletrodinâmica. Meios Dielétricos.

^{1, 2, 3} Doutor em Física. Atualmente é professor adjunto da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB.

⁴ Doutor em Engenharia Elétrica. Atualmente é professor adjunto da Universidade Estadual da Paraíba.

⁵ Graduando em Física pela Universidade Estadual da Paraíba – UEPB.

1 INTRODUÇÃO

A busca pela obtenção de uma solução correta e completa de inúmeros problemas da Física e Engenharia exige o uso de princípios da relatividade. Esta é uma observação que permanece válida mesmo quando os sistemas que se movem a baixas velocidades, já que os termos de primeira ordem em (v/c) , razão que aparece no fator de Lorentz, muitas vezes tem um papel determinante nas equações que descrevem os sistemas em estudo. É um fato comprovado que, quando a velocidade do meio isotrópico em movimento é pequena em comparação com a velocidade da luz, as equações de onda resultantes podem ser bastante simplificadas.

Na Engenharia Elétrica, notadamente, verifica-se a importância da relatividade no estudo da eletrodinâmica dos corpos em movimento, por se tratar de uma disciplina decisiva para engenheiros de energia, que são constantemente confrontados com problemas do tipo: uma justificativa de uma função de força $(-d\phi/dt)$ na equação de circuito de um *loop* em movimento; uma formulação correta das equações de Maxwell na rotação sistemas de coordenadas; o surgimento das correntes parasitas induzidas que precisam ser levadas em conta corretamente para a modelagem e simulação de solenoides atuadores de alta velocidade, entre outros. Dentre os métodos computacionais conhecidos pelos bons resultados no tratamento das equações que regem a eletrodinâmica, destaca-se o Método das Diferenças Finitas geralmente no domínio do tempo, que trata de simples discretizações das equações de Maxwell na forma diferencial, utilizando as componentes de campo, ou os potenciais, de uma grade de pontos estruturados como incógnitas (rede) (YEE, 1966).

As Diferenças Finitas de forma geral e o Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD), em particular, são muito eficientes e exigem poucas operações por ponto em uma grade computacional (YEE, 1966). O FDTD é um dos métodos mais comuns na computação eletromagnética (CEM), e pode ser aplicado a uma grande variedade de problemas de micro-ondas, por exemplo, o método FDTD define quantidades de campo nos nós da grade e as Equações de Maxwell são aproximadas por aplicação direta e explícita do esquema de diferenças finitas (ELSHERBENI et al., 2009). Uma vez que a alteração do tamanho da célula não altera a definição de uma componente de campo, o método característico à base é considerado como sendo uma abordagem numérica mais adequada para resolver os problemas que envolvem a dispersão dos campos eletromagnéticos variáveis no tempo, tais como o movimento em um meio dielétrico.

A proposta deste artigo é apresentar os resultados de uma investigação computacional sobre os efeitos relativísticos observados na propagação de uma onda eletromagnética na forma de um pulso gaussiano, rompendo um meio dielétrico com movimento uniforme. Obtivemos uma simulação numérica bem-sucedida de casos específicos com grande valor didático e científico.

O trabalho encontra-se dividido da seguinte forma: A seção II apresenta o desenvolvimento e está voltada para a resolução das equações de Maxwell em meios móveis e as principais etapas da construção do Método FDTD. Na seção III, apresentamos os resultados e discussão, onde apresentamos as simulações em FDTD do modelo unidimensional estudado. A conclusão do artigo é mostrado na seção IV.

2 DESENVOLVIMENTO

A ferramenta do cálculo numérico a ser investigada neste trabalho é o Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD), desenvolvido por K. S. Yee em 1966, que tem como base as equações de Maxwell na forma diferencial. Dentro das potencialidades deste método temos a possibilidade de resolver problemas que admitem soluções numéricas para um dado domínio espacial, tais como os campos elétricos e magnéticos que evoluem com o tempo, como os descritos pelas equações de Maxwell. O método FDTD é utilizado para analisar os principais parâmetros eletromagnéticos de um elemento irradiante qualquer. Pode ser utilizado, por exemplo, para analisar ondas eletromagnéticas reais por meio de simulações em uma região espacial finita, através de dados de amostras análogas às ondas propagando-se em um “espaço de dados computacionais”. Este método é muito utilizado para simular o comportamento de circuitos de micro-ondas, antenas, interação biológica com ondas eletromagnéticas, ótica e sistemas de radar. Os fatores limitantes desta ferramenta computacional são basicamente a memória e a velocidade de processamento do computador, devido ao alto custo computacional envolvido. Assim, o método FDTD calcula o campo em tempos e posições discretas dentro de uma rede estruturada conforme a representação gráfica apresentada na Figura 1. Estes campos podem ser representados como uma função de índices inteiros, $f(i, j, k, n) = f(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)$, e como esse método faz uso das diferenças centrais, temos que:

$$U(x_i, y_j, z_k, t_n) = U(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = U_{i,j,k}^n, \quad (1)$$

Onde U é o vetor campo magnético ou elétrico, Δx , Δy e Δz são as dimensões da célula, Δt é o intervalo entre as varreduras, i, j e k são os índices que localizam a célula na rede e n o índice da amostra no tempo. Em coordenadas cartesianas, temos uma grade retangular que permite a seguinte representação geométrica:

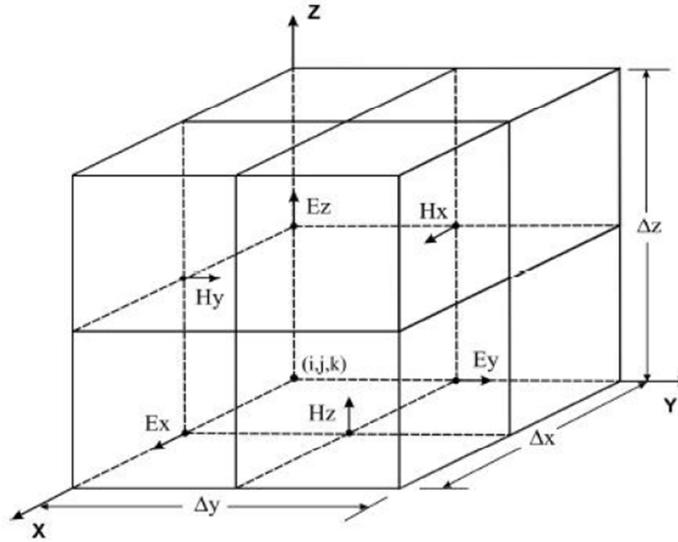


Figura 1 - Célula de Yee contendo as componentes do Campo Eletromagnético no Método FDTD.

A propagação de campos eletromagnéticos na região livre de fontes é regida pelas bem conhecidas equações de Maxwell (SULLIVAN, 1995):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (5)$$

Onde, \vec{E} e \vec{H} são respectivamente, as intensidades dos campos elétrico e magnético; $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ e $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ são as densidades de fluxo elétrico e magnético; ϵ_0 e μ_0 são as constantes fundamentais, permissividade elétrica e permeabilidade magnética no vácuo. Para campos eletromagnéticos inseridos em um meio em movimento, adotamos as novas formas para as densidades de fluxo elétrico e magnético, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \left(\frac{\eta^2 - 1}{c_0}\right) \vec{v} \times \vec{H}$ e $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} - \left(\frac{\eta^2 - 1}{c_0}\right) \vec{v} \times \vec{E}$ (BLADEL, 1984), onde η é o índice de refração do meio e \vec{v} o campo de velocidade do meio. As equações rotacionais, normalizadas e dependentes

do tempo de Maxwell para os campos elétrico e magnético se propagando em um meio que se move com uma velocidade uniforme $\vec{v} = v\hat{z}$, na ausência de fontes, são:

$$\vec{v} \times \vec{E} - \vec{\Lambda} X \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\vec{v} \times \vec{H} - \vec{\Lambda} X \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (7)$$

Onde $\vec{\Lambda} = \left(\frac{\eta^2-1}{c_0}\right) \vec{v} = \tilde{\Lambda} \hat{k}$. Temos também que \vec{E} e \vec{H} são vetores em três dimensões de maneira que, as equações (6) e (7) representam três equações cada. Sabendo que para cada caso estudado é necessário o conhecimento prévio das condições de contorno referentes à superfície em movimento S , iremos analisar o caso de uma onda plana viajando com velocidade uniforme na direção, z , onde o campo elétrico está orientado na direção, y , e por sua vez, o campo magnético está orientado na direção, x . Adotaremos as formas normalizadas para os campos: $\vec{H} \rightarrow \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \vec{H}$ e $\vec{E} \rightarrow \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} \vec{E}$, e apenas os tensores diagonais para que nosso problema se reduza a um simples caso unidimensional. Procedendo desta forma teremos as equações (8) e (9).

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \tilde{\Lambda} X \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{[\mu_{xx}]}{c_0} \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \tilde{\Lambda} X \frac{\partial H_x}{\partial t} - \frac{[\varepsilon_{yy}]}{c_0} \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (9)$$

E as componentes de campo elétrico e magnético, $H_z = E_z = \text{constante}$, que admitiremos serem nulas. Em uma configuração desta natureza, descrevemos o problema de um meio material dielétrico, que se move com uma velocidade \vec{v} , na presença de um campo eletromagnético pré-existente e continuarão a existir mesmo após a retirada do material (BLADEL, 1973).

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES DA SIMULAÇÃO UNIDIMENSIONAL

Aplicaremos agora as aproximações da teoria das diferenças finitas centrais para as derivadas temporais e espaciais nas equações (8) e (9) (SULLIVAN, 1995):

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{E_y^{n+1/2}(i+1) - E_y^{n+1/2}(i)}{\Delta z}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{H_x^n(i+1/2) - H_x^n(i-1/2)}{\Delta z}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{E_y^{n+1/2}(i) - E_y^{n-1/2}(i)}{\Delta t}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{H_x^{n+1}(i+1/2) - H_x^n(i+1/2)}{\Delta z}. \quad (13)$$

O tempo agora é especificado pelo índice “ n ”, isto é, o meio atual no tempo $t=n\Delta t$. Com as considerações iniciais definidas na seção anterior, nosso problema torna-se um simples caso unidimensional, onde teremos uma sequência estrutural de intercalações entre os campos elétrico e magnético.

Um programador experiente poderá fazer uso dessas características e por meio das várias opções de linguagem de programação poderá elaborar as mais diversas simulações, sendo que a única diferença a ser observada é a mudança da especificação da posição nos vetores no programa ($i+1/2$ e $i-1/2$ é reescrito como i e $i-1$). Para calcular $H_x(i+1/2)$, por exemplo, os valores vizinhos de E_y em i e $i+1$ são necessários. De uma forma similar, para calcular $E_y(i+1)$, o valor de H_x em $i+1/2$ e $i+1+1/2$ são necessários. E assim, as equações (6) e (7) podem ser rearranjadas na forma de um algoritmo iterativo resultando nas equações seguintes:

$$E_y^{n+1}(i) = E_y^n(i) - B_1 H_x^{n-\frac{1}{2}}(i-1) + B_2 H_x^{n-\frac{1}{2}}(i) + B_3 H_x^{n+\frac{1}{2}}(i), \quad (14)$$

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i) + A_1 E_y^n(i+1) - A_2 E_y^{n+1}(i) + A_3 E_y^n(i). \quad (15)$$

Onde listamos abaixo os valores das constantes fundamentais do problema relativístico:

$$A_1 = \frac{c_0 \Delta t}{\mu_{xx} \Delta z}, \quad A_2 = \frac{\tilde{\Lambda} c_0}{\mu_{xx}}, \quad A_3 = A_2 - A_1, \quad (16)$$

$$B_1 = \frac{c_0 \Delta t}{\varepsilon_{yy} \Delta z}, \quad B_2 = \frac{\tilde{\Lambda} c_0}{\varepsilon_{yy}}, \quad B_3 = A_1 - A_2. \quad (17)$$

É importante enfatizar que cálculos são intercalados no espaço e no tempo de maneira que, para determinarmos o novo valor de E_y na equação (14), por exemplo, necessitamos do valor prévio de E_y e do valor recente de H_x . Trata-se do paradigma

fundamental do método FDTD, como mostra o processo de intercalações e interdependência dos valores dos campos apresentado na Figura 2. Apesar da similaridade das equações (14) e (15), elas diferem por uma considerável ordem de magnitude devido aos valores das constantes fundamentais, μ_0 e ϵ_0 , e isso provocará uma diferença significativa nos valores de E_y e H_x .

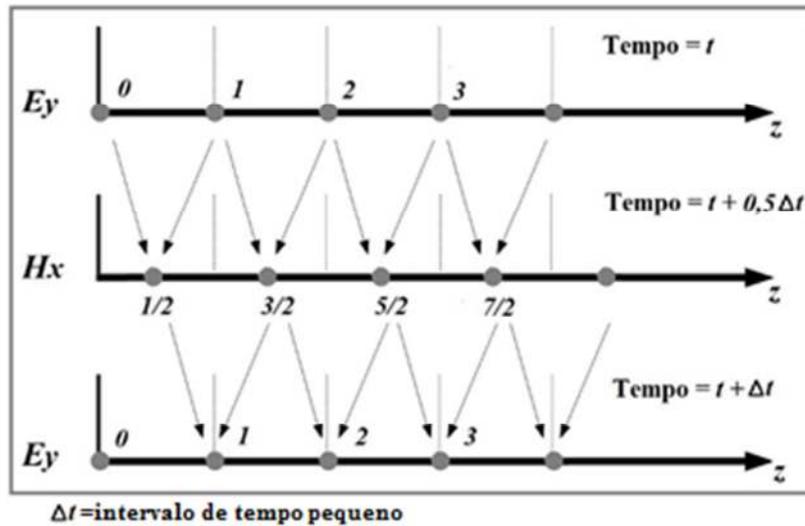


Figura 2 - Intercalação dos Campos E_y e H_x no espaço e tempo da formulação FDTD.

Adotando as unidades gaussianas e sabendo que a onda eletromagnética não pode viajar mais veloz que a velocidade da luz no espaço livre (c_0) para se propagar na distância de uma célula computacional, ela requer um tempo mínimo de $\Delta t = \Delta z / c_0$. Uma vez que o tamanho da célula Δz for escolhido, uma generalização desta argumentação nos conduz à conhecida “condição de Courant” (SULLIVAN, 1995):

$$\Delta t \leq \frac{\Delta z}{\sqrt{N}c_0}, \quad (18)$$

Onde “ N ” é o número de dimensões. Por uma questão de simplicidade nos cálculos, iremos considerar $\sqrt{N}=2$ no espaço livre para nossos problemas unidimensionais.

As condições de contorno absorvedoras são necessárias para garantir a reflexão dos campos \vec{E} e \vec{H} no problema espacial. Normalmente, no cálculo do campo \vec{E} , necessitamos conhecer os valores em torno de \vec{H} . Sabemos que não existem fontes fora do espaço do problema, portanto, os campos na borda devem estar se propagando para fora. Usaremos esses dois fatos para estimar o valor no final, usando o valor próximo a

ele. Supondo que estamos olhando para uma condição de contorno, no final, onde $i=0$ (SULLIVAN, 1995). Se a onda se propaga na direção da fronteira do espaço livre, com velocidade c_0 , então, em um passo de tempo do algoritmo FDTD, ela percorre uma distância dada pela equação (19):

$$Distância = c_0 \Delta t = c_0 \frac{\Delta z}{2c_0} = \frac{\Delta z}{2}. \quad (19)$$

A equação (19), basicamente, explica que são necessários dois passos de tempo para uma frente de onda atravessar uma célula. Uma condição de contorno aceitável pode ser descrita como:

$$E_y^n(0) = E_1^{n-2}(1), \quad (20)$$

Que é relativamente fácil de ser implementada, simplesmente armazenando um valor de $E_y^n(1)$ para dois passos de tempo que então, alocado em $E_y^n(0)$. Um pulso eletromagnético é descrito como um ente físico de alta energia e de largo espectro, com origem em fenômenos naturais, tais como explosões solares ou estelares, explosões nucleares ou mesmo em grandes correntes elétricas. Iniciamos a verificação das propriedades de um pulso eletromagnético reescrevendo as equações (14) e (15) na forma de código computacional (bem aceito em Linguagem C, Matlab ou Maple), e obtemos as seguintes equações:

$$E_y[i] = E_y[i] - B_1 H_x[i-1] + B_2 H_x[i] + B_3 H_x[i], \quad (21)$$

$$H_x[i] = H_x[i] + A_1 E_y[i+1] - A_2 E_y[i] + A_3 E_y[i]. \quad (22)$$

O resultado apresentado nesta seção é a simulação unidimensional de um pulso eletromagnético na forma de um pulso gaussiano, rompendo um meio dielétrico S , que se localiza no centro do problema espacial (com $\varepsilon \neq \varepsilon_{yy}$ a partir de $N = 100$ células):

$$E_y(i) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t_0 - t}{12}\right)^2\right). \quad (23)$$

Define-se o vetor de Poynting como sendo a grandeza importante na física que representa a densidade direcional do fluxo de energia, ou a quantidade de energia

transferida por unidade de área ($Watts \cdot m^{-2}$), de um campo eletromagnético (COMPTON et al., 1964). É definido, matematicamente pela operação:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (24)$$

A Figura 3 mostra a propagação dos Campos Elétrico e Magnético no espaço livre, isto é, antes de romper o meio dielétrico localizado no centro da simulação. Na Figura 3(c) vemos uma estimativa do Vetor de Poynting nessas mesmas condições.

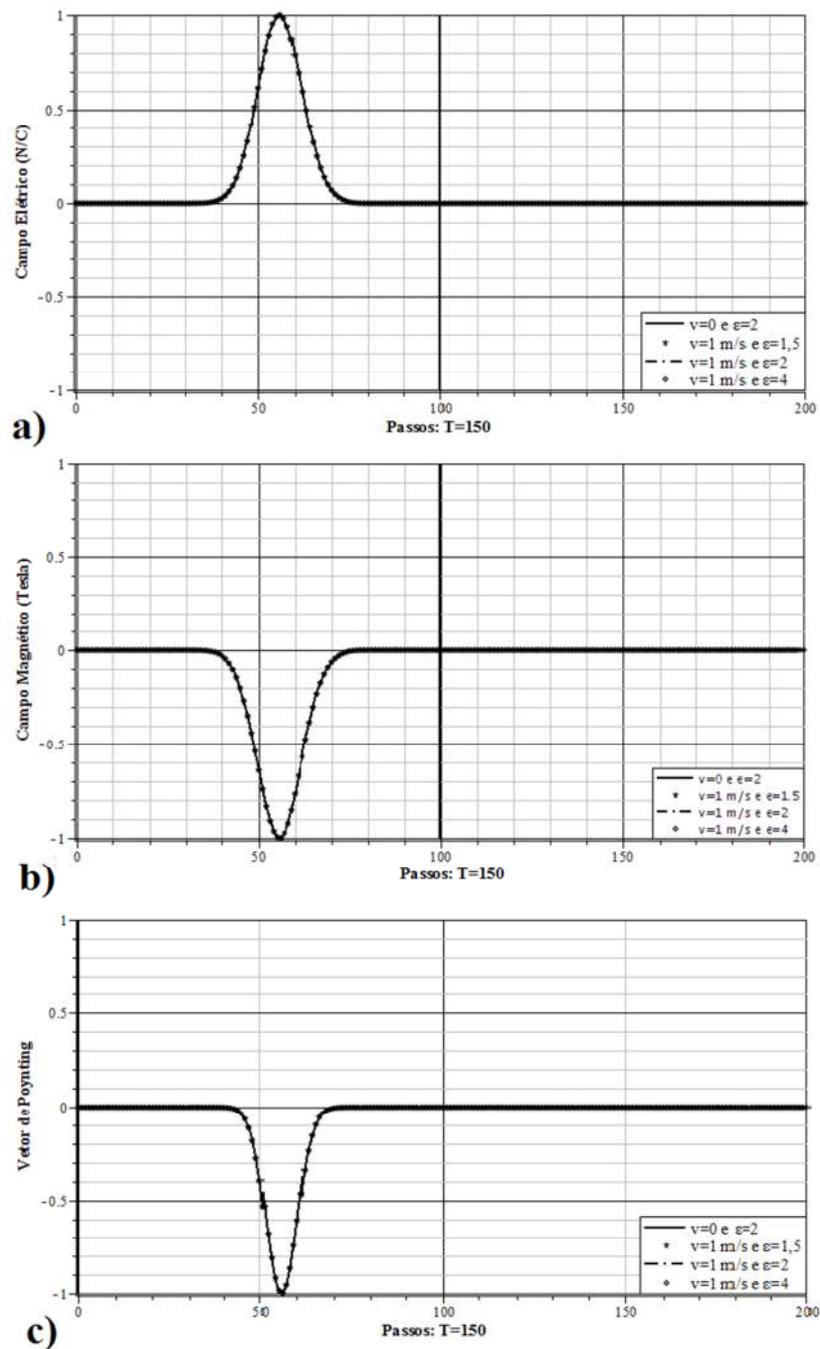


Figura 3 – a) Comportamento do campo elétrico; b) Comportamento do campo magnético e c) Vetor de *Poynting*. Parâmetros da simulação estável (com condições

absorvedoras): $T=150$ passos de tempo, $t_0 = 40$ s, $v=1$ m/s (velocidade do meio dielétrico), $N=200$ células, $A_2 = A_3 = 0.5/\mu$ e $B_2 = B_3 = 0.5/\varepsilon$.

A Figura 4 apresenta o comportamento do pulso gaussiano após a colisão com a interface do meio dielétrico localizado no centro da simulação computacional. A linha sólida representa a situação em que o meio dielétrico é estático ($v=0$) o que nos permite fazer uma análise por comparação do efeito provocado pelo fator de Lorentz. A simulação foi realizada usando 3 (três) meios dielétricos distintos (variando as constantes fundamentais do meio, μ e ε) e, em uma primeira análise, é possível ver variações tanto na amplitude dos demais pulsos (representados com símbolos especiais) quanto na fase.

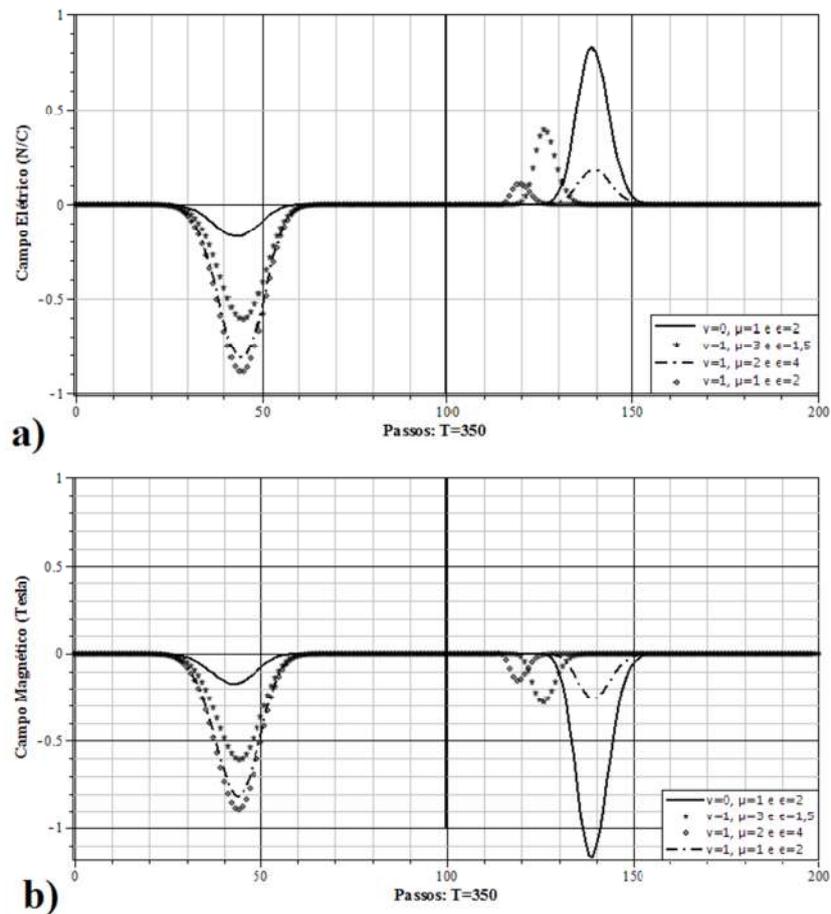


Figura 4 - Representação dos Campos no caso relativístico. (a) Campo Elétrico; (b) Campo Magnético. Parâmetros da simulação estável: $N=350$ Passos de Tempo, $t_0 = 40$ s, $v=1$ m/s, $N=200$ células, $A_2 = A_3 = 0.5/\mu$ e $B_2 = B_3 = 0.5/\varepsilon$.

A Figura 5 representa uma visualização ampliada dos efeitos de reflexão e transmissão do Campo Elétrico, verificamos nitidamente o fenômeno de deslocamento e

inversão de fase do pulso refletido (Figura 5a) e deslocamento de fase do pulso transmitido (Figura 5b). Simulações sucessivas mostraram que as variações nos valores das constantes fundamentais do eletromagnetismo é que provocam a variação da amplitude do pulso.

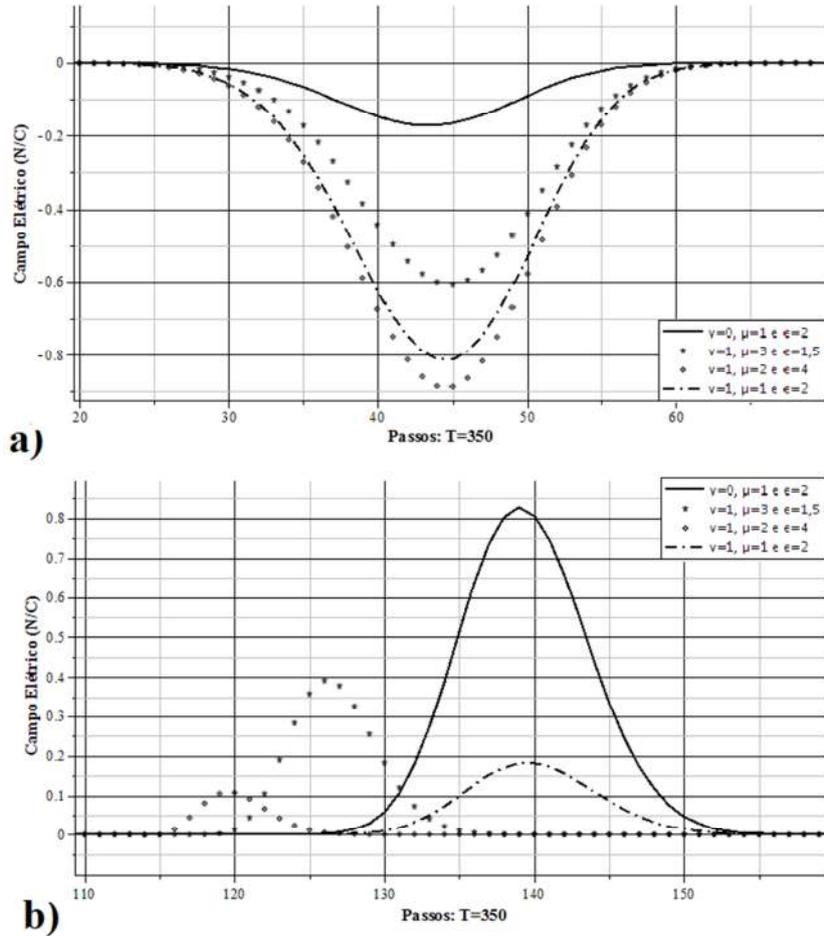


Figura 5 – Representação ampliada do Campo Elétrico. (a) Campo Elétrico Refletido. (b) Campo Elétrico Transmitido. Parâmetros da simulação estável: $N=350$ Passos de Tempo, $t_0 = 40$ s, $v=1$ m/s, $N=200$ células, $A_2 = A_3 = 0.5/\mu$ e $B_2 = B_3 = 0.5/\epsilon$.

A Figura 6 apresenta da ampliação imagem do Campo Magnético após a colisão com a interface do meio dielétrico. Na Figura 6(a), é possível ver claramente os fenômenos de diminuição da amplitude, provocado pelo fator de Lorentz, e deslocamento de fase é oriundo da mudança das constantes fundamentais do eletromagnetismo. Com a Figura 6(b), percebe-se que não há inversão de fase no pulso transmitido, apenas os fenômenos de deslocamento de fase e diminuição da amplitude.

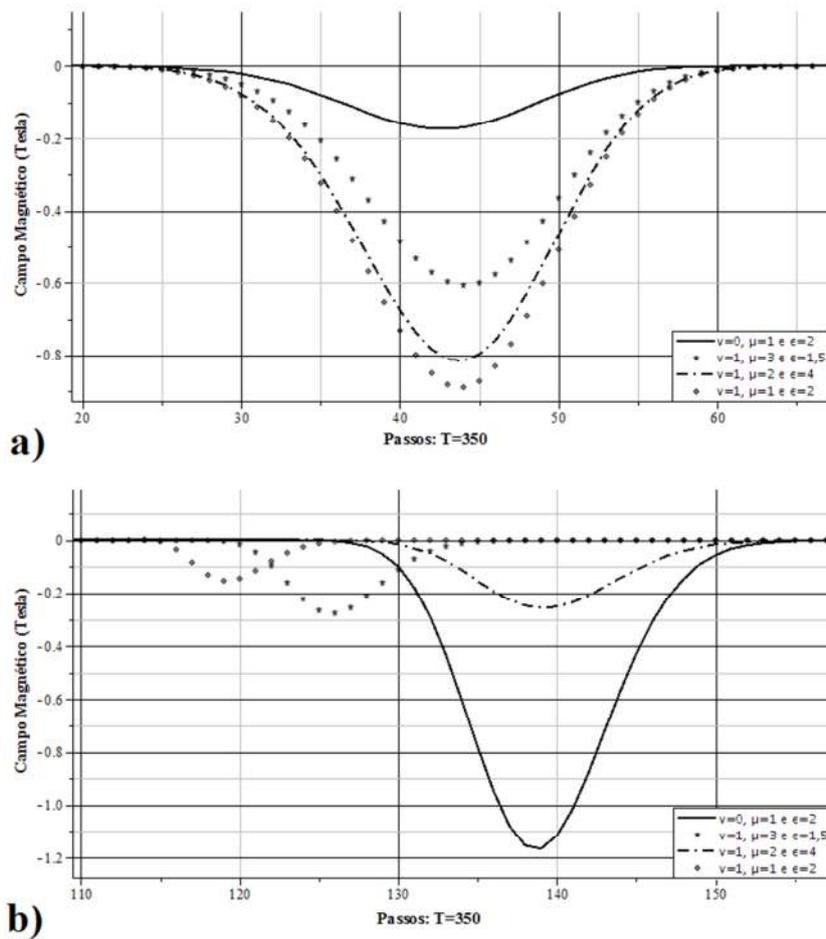


Figura 6 - Representação do Campo Magnético. (a) Campo Magnético Refletido; (b) Campo Magnético Transmitido. Parâmetros da simulação estável: $N=350$ Passos de Tempo, $t_0 = 40$ s, $v=1$ m/s, $N=200$ células, $A_2 = A_3 = 0.5/\mu$ e $B_2 = B_3 = 0.5/\epsilon$.

A visualização da distribuição de energia do pulso gaussiano após a colisão com o meio dielétrico na estimativa da propagação do vetor Poynting é mostrado na Figura 7. Observa-se que a distribuição de energia muda drasticamente com a presença do fator de Lorentz, comparando os dielétricos com as mesmas propriedades físicas: estático (linha sólida) e com velocidade constante (linha tracejada).

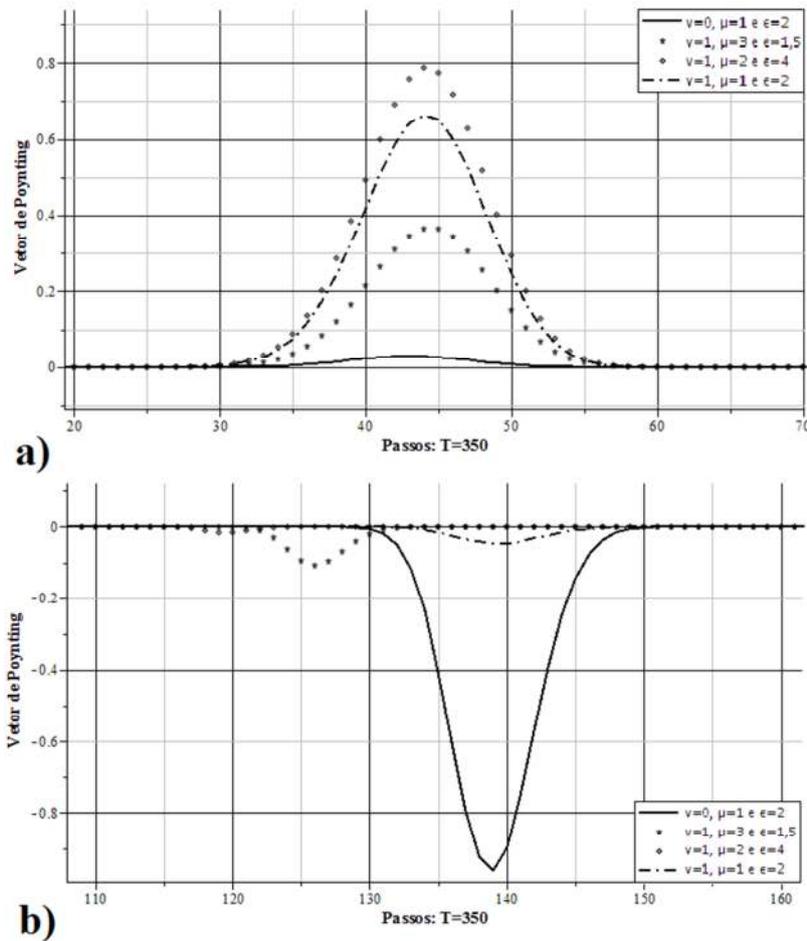


Figura 8 - Representação do Vetor de Poynting no caso relativístico. (a) Estimativa do Vetor de Poynting Refletido. (b) Estimativa do Vetor de Poynting Transmitido. Parâmetros da simulação estável: $N=350$ Passos de Tempo, $t_0 = 40$ s, $v=1$ m/s, $N=200$ células, $A_2 = A_3 = 0.5/\mu$ e $B_2 = B_3 = 0.5/\epsilon$.

4 CONCLUSÃO

Concluimos neste artigo que o método característico FDTD que é baseado na resolução equações de Maxwell-Minkowski numericamente é bastante eficiente do ponto de vista didático, para uma descrição da propagação de pulsos eletromagnéticos unidimensionais rompendo meios dielétricos, que se movem com velocidade constante. O trabalho mostrou que a velocidade do meio faz com que a onda se defase em relação a que se propagaria no meio em repouso (espaço livre), e o mais importante, que o fluxo de energia da onda, dado pelo vetor de Poynting está fora de fase com os campos.

Uma vez que a velocidade do meio controla a diferença de fase entre o fluxo de energia e o vetor de onda, então poderá existir uma velocidade na qual o vetor de onda e o vetor de Poynting estejam antiparalelos. Tal propriedade é encontrada em

metamateriais, e assim a relação entre a propagação de ondas em meios móveis com a propagação destas em metamateriais poderá ser explorada em trabalhos futuros. Outro ponto de interesse em pesquisas posteriores é que as simulações estudadas mostraram que o meio dielétrico em movimento provoca a reflexão quase total da energia do pulso gaussiano incidente, podendo dessa forma se analisado em maiores detalhes buscando aplicações na grande área do eletromagnetismo aplicado.

AGRADECIMENTOS

Os autores do trabalho agradecem ao CNPq sob o convênio 472098/2013-6 e a Universidade Estadual da Paraíba- UEPB.

REFERÊNCIAS

YEE, K. S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwells equations in isotropic media. IEEE Transaction, Antennas and Propagation, vol. 14, 1966.

ELSHARBENI, A. et al. The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics, SciTech Publishing, 2009.

BLADEL, J. V. Relativity and Engeneering. Spring-Verlag, Berlin,Heifelberg, New York, Tokyo, 1984.

BLADEL, J. V. Relativistic Theory of Rotating Disks. Proceedings of the IEEE, vol. 61, 1973, 260p.

SULLIVAN, D. M. Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method, IEEE Press, New York, Artech House, 1995.

COMPTON, R. T. Jr. et al. Poynting's theorem for radiating systems in moving media, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1964, 238p.

MAPLESOFT, Maple 2016 (trial version). Available: www.maplesoft.com.