As derivadas e a sua aplicação na Análise Marginal de Custos na Economia

LIMA, Abizai Campos[1]

Resumo

O sucesso de uma empresa passa por um bom planejamento de seus custos operacionais. A derivada tem um importante papel na determinação do custo marginal dentro das organizações empresarias. Desde o seu surgimento até os dias atuais, a derivada ou cálculo diferencial, assume fundamental importância para o desenvolvimento de outras ciências. Na economia, sua aplicação destaca um importante papel quando se quer dimensionar os custos de se produzir unidades além do que foi planejado. É nesse contexto que surge o custo marginal, importante ferramenta da economia que ajuda economistas e administradores a calcular o custo de se produzir uma unidade a mais além da produção total. O cálculo diferencial é o instrumento matemático que os profissionais ligados à gestão empresarial utilizam para se determinar o custo marginal de produção, dando condições para que eles procedam a sua análise, de forma eficiente e confiável.

Palavras Chaves: Análise. Aplicação. Custos. Derivadas. Economia.

[1] Bacharel em Administração de Empresas pela Faculdade de Tecnologia e Ciências (FTC), Licenciado em Matemática pela Universiade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB). Possui Especialização em Educação à distância: Tutoria, Metodologia e Apredizagem (EDUCON); em Ensino de Matemática (CLARENTIANO) e em Gestão Pública (FAEL. E-mail: abizai.campos@hotmail.com

Introdução

A matemática é uma ferramenta extremamente útil para o desenvolvimento de varias ciências. Entre muitos dos seus conteúdos, está a Derivada, importante ferramenta do Cálculo utilizado em vários ramos do saber.

Descoberto por Leibniz e Newton, no século XVII, o cálculo derivado tem sido utilizado na descoberta da taxa de variação no comportamento de grandezas variáveis, de forças ou objetos em movimento. Na economia, é assunto fundamental na determinação da Análise marginal de produção. De acordo com Menezes (2010), p. 2.

> Em Economia, **Análise Marginal** se refere ao uso de derivadas de funções para estimar a variação ocorrida no valor da variável dependente, quando há um acréscimo de 1 unidade no valor da variável independente.

Sendo assim, interessa-nos saber sobre a importância do Cálculo derivado para a ciência econômica como ferramenta útil no planejamento da produção de um determinado bem e quais as consequências que o aumento dessa produção pode trazer para os detentores das tecnologias de produção.

Dentro do contexto matemático e econômico, o objetivo desse trabalho é discutir a importância do cálculo diferencial como ferramenta útil para economistas e administradores na determinação do custo marginal de produção.

Derivadas

O cálculo diferencial, ou simplesmente derivado, tem seu surgimento no final do século XVII, atribuído aos estudos de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. A derivada surge então como uma importante ferramenta da matemática para o desenvolvimento de várias ciências. Esses estudos possibilitaram a descoberta de um método que permitiu o cálculo de problemas relacionados com a construção de retas tangentes, determinação de áreas e volumes (Dalla'nesse, 2000). Segundo Boyer,

> A primeira exposição do cálculo diferencial foi publicada por Leibniz em 1684 sob o longo mas significativo título de Nova methodus maximis et minimis itenque tangentibus, qua nec

> irrationales quantitates moratus (Um novo método para máximos e mínimos, e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais). (Disponívem em http://www.mat.ibilce.unesp.br/laboratorio/pages/historia/leibniz.htm). Acesso em 31/05/2013

Embora Leibniz tenha apresentado ao mundo essa nova ferramenta, coube ao matemático francês Augustin-Louis Cauchy defini-la tal qual a conhecemos hoje. No cálculo de Cauchy (Boyer, 1996, p. 55) os conceitos de função e de limite de função eram fundamentais. Ao definir a derivada de y=f(x) com relação a *x*, ele deu à variável *x* um incremento Δx= e formou a razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

A relação de Cauchy para a definição de derivadas é a que basicamente é utilizada atualmente, de acordo com Iezzi (2009, p. 135) *dada a função f , definida em um intervalo real , chamamos derivada de f à função f '(x)* $= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ *, se existir e for finito este limite.*

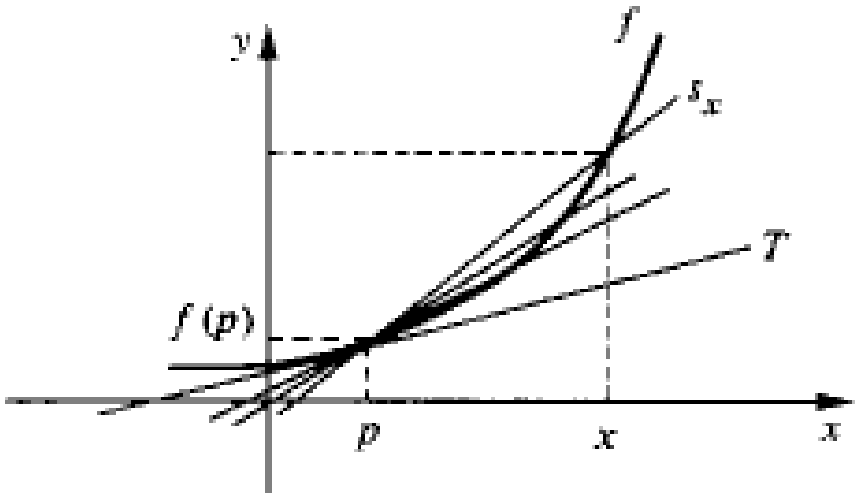
Outra importante definição afirma que *no cálculo, a* ***derivada*** *representa a taxa de variação instantânea de uma função. Um exemplo típico é a função velocidade que representa a taxa de variação (derivada) da função espaço. Do mesmo modo a função aceleração é a derivada da função velocidade. (Disponível em* http://www.ctec.ufal.br/professor/enl/aurb006/apostilas/apostila_derivadas.pdf)

A definição dada acima consegue relacionar a derivada com uma situação mais próxima da realidade de qualquer ser humano. Visto como uma taxa de variação observável na descoberta da função aceleração através da função velocidade, possibilitou relacionar esta importante ferramenta do cálculo com a física. Essa descoberta ajudou a física a descrever a aceleração como uma derivada da velocidade.

Graficamente, o conceito de derivadas é o de encontrar retas tangentes a uma função dada. De acordo com Iezzi, 2009, p. 130

A derivada de uma função f no ponto x_o é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_o.

De acordo com o autor, o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de *f* num ponto P fixo é dado por tg= $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, sendo essa definição a mesma para a tangente do ângulo formado entre o gráfico e o eixo das abscissas. Essa Esse fato se assemelha à própria definição de derivadas.



Fonte: Guidorizzi, p. 137, 2001

Custos

Para um melhor entendimento do termo custo marginal, faz-se necessário abordarmos o significado da palavra custos. Para Martins (1995, p. 24), o custo é um "gasto relativo à bem ou serviço utilizado na produção de outros bens ou serviços". Tal conceito nos remete ao gasto na aquisição de bens ou serviços, e também ao que é percebido durante o processo produtivo.

Os custos desempenham um papel fundamental nas decisões das empresas. Tal fato permite que as organizações possam repensar seu planejamento, no sentido de reduzir esses custos, desde a aquisição de matéria prima, passando por todo o processo produtivo até o produto final. Segundo Porter (1985, p. 57) os custos podem orientar as empresas a aumentarem suas vantagens competitivas, exercendo uma forte influência sobre a estrutura industrial.

Por ter um impacto de grandes proporções no bom desempenho das empresas, não raro verifica-se dentro dessas organizações tentativas de reduzi-los, no intuito de tornar seus produtos mais competitivos no mercado.

Aplicações de Derivadas na economia e a Análise Marginal de Custos

Decisões e mudanças no plano econômico são tomadas todos os dias por governos, empresas e pessoas em geral, afetando direta ou indiretamente, a maioria de nós e também o mundo dos negócios. Segundo Mochón (2006)

> a economia estuda como as sociedades administram recursos escassos para produzir bens e serviços e distribuí-los entre diferentes indivíduos (Mochón, 2006, p. 05)

Para Ferguson (1994, p. 239), o "custo marginal é o acréscimo de custo total atribuível ao acréscimo de uma unidade na produção". Já Pindick & Rubinfeld (1999, p. 221), definem custo marginal como "o aumento de custo ocasionado pela produção de uma unidade adicional do produto", e quando o custo fixo não sofre variação, "o custo marginal é apenas o aumento no custo variável ocasionado por uma unidade extra do produto".

De acordo com O'Sullivan (2004, p. 189) os economistas costumam pensar na margem, e o custo marginal faz parte do pensamento marginal. Ainda segundo o autor

> o custo marginal de curto prazo (CMACP) é definido como a mudança no custo total de curto prazo resultante da produção de uma unidade adicional de um bem.(O'Sullivan 2004, p. 189)

Em determinadas situações, é necessário tomar decisões de curto prazo em relação à produção de um determinado bem, tal fato realça a importância de estudo dos custo marginais.

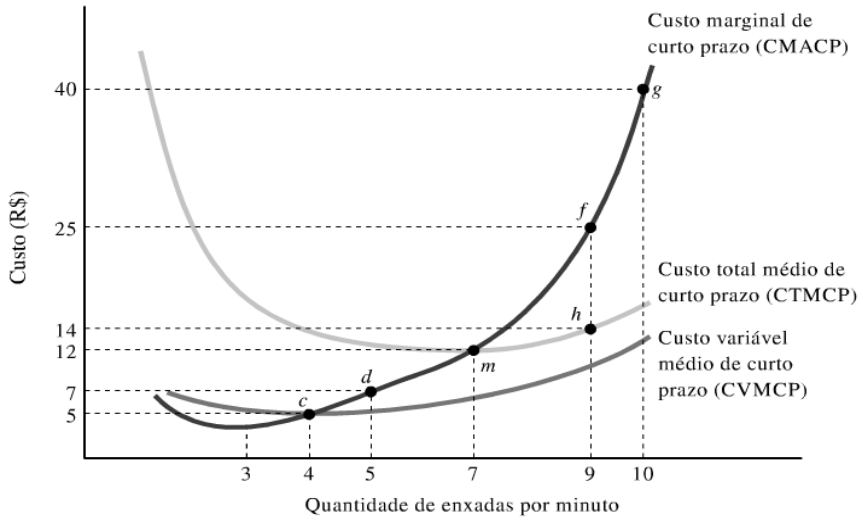
No conceito de custo marginal, pode-se identificar uma relação de proximidade com algo bem comum na definição de derivadas: variação. Veremos que esta relação

não é por acaso, visto que é através da derivada da função custo que pode-se identificar e ser fazer a análise marginal de custos. Matematicamente,

> Se C(x) é o custo total de produção de x unidades de um produto, então o **custo marginal** quando $x=x_0$, é dado por $C'(x_0)$, caso exista. A função C'(x) é chamada **função custo marginal** (Disponível em http://www.uapi.edu.br/conteudo/material_online/disciplinas/matematica/uni04_funcoes.htm). Acesso em 01/06/2013.

Matematicamente falando, Se a função de custo de um certo bem é derivável, então o custo marginal é a taxa instantânea com a qual aumenta ou diminui o custo para produzir uma unidade adicional do bem.

O gráfico abaixo mostra a curva marginal de custos. É possível perceber que quanto maior a quantidade de unidades adicionais, maior é o custo marginal.



Fonte: O'Sullivan; Introdução à Economia, 2004

Analisando o conceito de custo marginal, é possível verificar que decisões de curto prazo podem ser tomadas e economistas e administradores podem recorrer às ferramentas da matemática para ajudá-los na tomada dessas decisões.

Mas como é que se determina a função custo marginal ? De acordo com Morettin

> *Seja C_t a função custo total para produzir q unidades de um produto. Chama-se custo marginal è derivada de C_t em relação a q_1 (indica-se o custo marginal por Cmg). Assim Cmg(x)= C'(q_1) (MORETTIN, 1990, p. 155)*

Na definição acima, $C'(q_1)$ pode ser interpretada como a taxa de variação do custo total quando q_1 unidades são produzidas.

Para Menezes (2013, p. 1),

> se C(q) é o custo de produção de q unidades de um certo produto, então o **Custo Marginal**, quando q = q_1, é dada por $C'(q_1)$, caso exista. A função C' é chamada **Função Custo Marginal** e frequentemente é uma boa aproximação do custo de produção de uma unidade adicional.

Ainda segundo a mesma autora.

> Os economistas usam o termo **Custo Marginal** para limite do quociente (1) quando Δq tende a zero, desde que o limite exista. Esse limite é a derivada de C em q_1 (Menezes, p. 1)

Aqui, percebe-se que tanto a definição de Morettin quanto a de Menezes aborda a aplicação de derivadas para se determinar a o custo marginal a partir de uma função dada para o mesmo custo.

Determinado o Custo marginal a partir de uma função.

Agora, serão feitas aplicações do cálculo diferencial na determinação do custo marginal a partir da função.

Menezes (2013, p. 2), aborda uma aplicação de derivadas para se determinar a taxa de variação de um produto dado. Veja:

1- Suponha num certo mercado que p seja o preço de uma caixa de uvas, x o número de milhares de caixas ofertadas diariamente, sendo a equação de oferta

px – 20p – 3x + 105 = 0. Sua oferta diária que está decrescendo a uma taxa diária é de 5000 caixas?

Seja t dias o tempo decorrido desde que a oferta diária de uvas começou a decrescer. Então p e x são ambas funções de t. Já que a oferta diária está decrescendo a uma taxa de 250 caixas por dia,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-250}{1000} = \frac{-1}{4}.$$

Queremos encontrar $\frac{dp}{dt}$, quando x = 5.

px – 20p – 3x + 105 = 0 , diferenciando implicitamente em relação a t, obtemos:

$$p\frac{dx}{dt} + \frac{xdp}{dt} - \frac{20dp}{dt} - \frac{3dx}{dt} = 0$$

$$(p-3)\frac{dx}{dt} + (x-20)\frac{dp}{dt} = 0$$

$$\frac{dp}{dt}(x-20) = -(p-3)\frac{dx}{dt} \qquad ou \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{3-p}{x-20}\frac{dx}{dt}$$

Quando x = 5 na equação de Oferta, p = 6 e como $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{4}$, então $\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{20}$, ou seja, -0,05. Logo o preço de uma caixa de uvas está decrescendo a uma taxa de R$ 0,05 por dia, quando a oferta diária é de 5000 caixas de uvas.

2- Uma mineradora determina que sua função de custo total para a extração de certo tipo de ferro é dada por $C(x) = 2.5\ x^2 + 4.32\ x + 1200$ em US$, onde x é dada em toneladas de ferro.Determine o custo adicional quando a produção aumenta de 10 para 11 toneladas de ferro. Ache o custo marginal para 10 toneladas.

Primeramente calculamos C(11) = 1550.02 e C(10) = 1493.20, logo:

C(11) − C(10) = US$56.82.

Derivando a função de custo, temos:

CMg(x) = C ′(x) = 5 x + 4.32 =⇒ CMg(10) = US$54.32 . Isto significa que se a extração de ferro é incrementada em 1 tonelada, de 10 para 11 toneladas a mudança do custo é, aproximadamente, de US$ 54.32. Em outras palavras, extrair uma

tonelada adicional de ferro custa US$ 54.32.

Conclusão

O grande diferencial da matemática é a sua aplicação em situações reias, no intuito de facilitar a vida em sociedade. O cálculo, desde o seu surgimento, continua a ser aplicado em vários ramos do conhecimento. Sendo assim, ele é uma importante ferramenta utilizada por administradores e economistas para se determinar o custo marginal de um produto, sabendo qual é a sua função de produção. Essa ferramenta utilizada no plano empresarial pode ajudar as empresas a descobrir qual o custo de se produzir uma unidade adicional de um determinado produto, facilitando, dessa forma, na no controle dos custos de produção e no aumento da eficiência sobre os mesmos.

Referências

BOYER, Carl. B. **História da Matemática**. São Paulo: EDGARD BLÜCHER, 2ª Ed. Tradução: Elza E. Gomide, 1996.

DALL'ANESE, Cláudio. **Conceito de Derivada: Uma Proposta para o seu Ensino e aprendizagem.** PUC-SP, 2000. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/claudio_dall'anese.pdf (acesso em outubro de 2012)

FERGUSON, C. E. **Microeconomia**, 18ª Edição, Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1994

GUIDORIZZO, Hamilton Luiz, 5ª Edição, São Paulo: LTC, 2001.

IEZZI, Gelson**. Fundamentos de Matemática Elementar**. Vol. 8. São Paulo: Atual, 1999

MENEZES, Leopoldina Cachoeira. Análise Marginal - Problemas Relacionados. Universidade Federal da Bahia. Disponível em www.mat.ufba.br/disciplinas/matematica1/apost-mar-04.doc (Acesso em 12/05/2013)

MOCHÓN, Francisco. **Princípios de Economia.** Tradução de Thelma Guimarães- São Paulo: Person Prentice Hall, 2007.

O'SULLIVAN, Arthur. Introdução à economia: princípios e ferramentas / Arthur O'Sullivan, Steven Shefrin; tradutora Maria Lúcia G. L Rosa; revisora técnica e coautora Marislei Nishijima. – São Paulo: Prentice Hall, 2004

PINDYCK, R. S & RUBINFELD, D. L. **Microeconomia**, 4ª Edição. São Paulo: Makron Books, 1999

PORTER, M. **Vantagem Competitiva: Criando e sustentando um desempenho superior**. Rio de Janeiro: Campus, 1989.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS. Disponível em http://www.ctec.ufal.br/professor/enl/aurb006/apostilas/apostila_derivadas.pdf (Acesso em 01/06/2013)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ. Disponível em http://www.uapi.edu.br/conteudo/material_online/disciplinas/matematica/uni04_funcoes.html (Acesso em 01/06/2013)