CONCEITOS PRELIMINARES PARA ESTUDO DA RELATIVIDADE GERAL

Rafaello Virgilli [1]

Resumo

Nesse texto é visitada a maioria dos conceitos geométricos necessários para o estudo da Teoria da Relatividade Geral. Seguindo uma sequencia construtiva, são abordados tópicos desde o conceito de espaço topológico até assuntos mais avançados da Geometria Diferencial, como transporte paralelo e curvatura.

[1] Bacharel em Física - USP

Sumário

1 Introdução **3**

2 Espaços Topológicos **3**

3 Variedades e Sistemas de Coordenadas **4**

4 Vetores e Tensores sobre Variedades **5**

5 Métrica sobre uma variedade **7**

6 Derivada Covariante e Transporte Paralelo **8**

7 Curvatura e Geodésicas **10**

8 Referências **12**

1 Introdução

No estudo de efeitos quânticos na vizinhança de buracos negros é de fundamental importância o domínio da teoria da Relatividade Geral.

Nessa teoria o físico Albert Einstein propõe uma nova interpretação física para o campo gravitacional. Segundo ele, o campo gravitacional é reflexo da curvatura do espaço-tempo e que, desconsiderando outras forças, os corpos seguem geodésicas neste espaço-tempo.

Um dos princípios da Relatividade Geral é que toda e qualquer informação propaga-se com velocidade igual ou inferior à velocidade da luz no vácuo, implicando em novos conceitos de distância, simultaneidade e em uma íntima relação entre o espaço e o tempo.

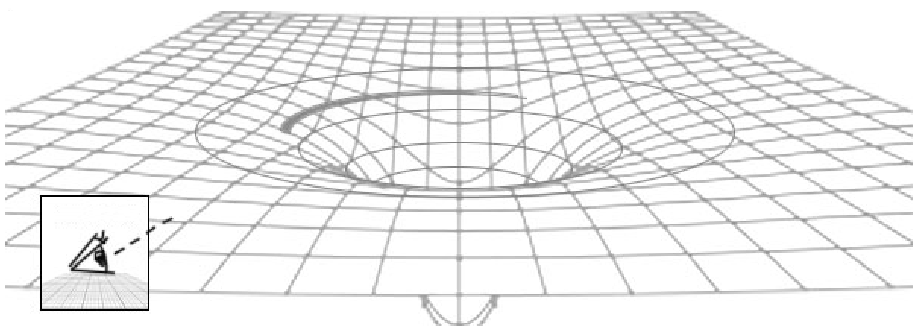

Figura 1: sistema de coordenadas sobre M

Com isso, fez-se necessária uma reformulação bastante radical nos preceitos da mecânica clássica. A geometria euclidiana já não se mostra suficiente para abraçar essa nova teoria.

2 Espaços Topológicos

Inicialmente, é importante visitar a definição espaço topológico. Sendo assim:

Um espaço topológico (X, T) consiste em um conjunto X e uma coleção T de subconjuntos de X satisfazendo as seguintes propriedades:

- A união de elementos de T pertence a T
- A interseção finita elementos de T pertence a T
- $X \subset T$ e $\emptyset \subset T$

Quando T satisfaz essas três propriedades, T é dita ser uma topologia em X e os elementos de T são chamados de *abertos*.

Os espaços topológicos são muito gerais e muitos deles não são interessantes para a descrição da natureza.

Assim nos restringimos às *variedades*, que são espaços topológicos mais específicos. Tais espaços podem ser cobertos por sistemas de coordenadas e ainda possuem propriedades extras como serem paracompactos e Housdorff.

3 Variedades e Sistemas de Coordenadas

Basicamente, uma varidedade é um espaço feito de pedaços que parecem abertos do $\mathbb{R}^n$ e que podem ser "colados" de forma suave (C^∞). Precisamente, uma variedade M real, n-dimensional e C^∞ é um conjunto juntamente com uma coleção de subconjuntos $\{O_\alpha\}$ satisfazendo:

1. Cada $p \in M$ pertence a, no mínimo, um O_α. Ou seja, $\{O_\alpha\}$ cobre M.
2. Para cada α existe uma função bijetora $\psi_\alpha : O_\alpha \longrightarrow U_\alpha$, onde U_α é um aberto do $\mathbb{R}^n$.
3. Tomando dois quaisquer O_α e O_β tais que $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$, então a função $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi_\beta[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\beta \subset \mathbb{R}^n$ deve ser infinitamente diferenciável (C^∞), conforme entendemos diferenciabilidade pelo cálculo avançado. Além disso, $\psi_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta]$ e $\psi_\beta[O_\alpha \cap O_\beta]$ devem ser abertos no $\mathbb{R}^n$. É importante dizer que cada ψ_α é chamado também de sistema de coordenadas local em O_α.

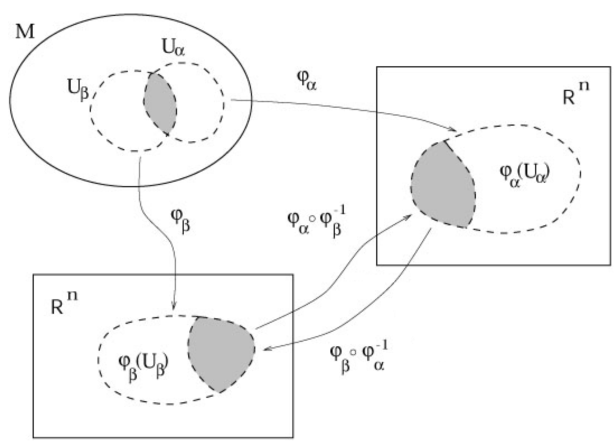

Figura 2: sistema de coordenadas sobre M

Impondo que todos os ψ_α de nossa coleção sejam homeomorfismos temos que $\{O_\alpha\}$ é uma topologia sobre essa variedade. Considerando essa última restrição, M, além de ser uma variedade, é um espaço topológico.

4 Vetores e Tensores sobre Variedades

A noção de que o espaço possui como uma característica natual o comportamento de espaço vetorial não é mais verdade quando falamos de geometrias curvas e faz-se necessária uma nova abordagem para vetores nessas geometrias. Usamos então a noção de derivadas direcionais para definir *vetorestangentes* e *espacostangentes* em variedades. Seja $\mathscr{F}$ o conjunto das funções C^∞ de M em $\mathbb{R}^n$, então um **vetor tangente** v em $p \in M$ como sendo a função $v : \mathscr{F} \mapsto \mathbb{R}$ tal que:

1. $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$ para todo $\forall f, g \in \mathscr{F}$ e para todo $a, b \in \mathbb{R}$
2. $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$ para todo $\forall f, g \in \mathscr{F}$

A coleção T_pM dos vetores tangentes em $p \in M$ possui estrutura de espaço vetorial e é chamado de **espaço tangente** em p.

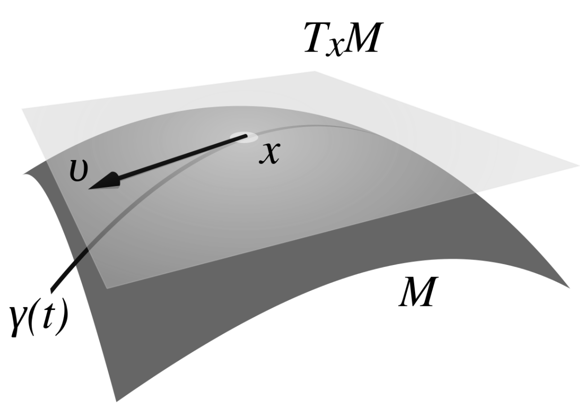

Figura 3: espaço tangente T_xM sobre o ponto x

Sendo $\psi : O \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas local em torno de $p \in O$ e sabendo que se $f \in \mathscr{F}$ então $f \circ \psi^{-1} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é C^∞, definimos a **base coordenada** de T_pM para ψ por:

$$X_\mu(f) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f \circ \psi^{-1})\Big|_{\psi(p)} \qquad (1)$$

Podemos, portanto, escrever qualquer vetor tangente em p como

$$v = \sum_{\mu=1}^{n} v^{\mu} X_{\mu} \tag{2}$$

Seguindo o mesmo raciocínio podemos definir objetos mais complicados como **tensores**, que são muito frequentes em Relatividade Geral.

O **espaço dual** T_p^*M é finido pela coleção dos funcionais lineares $f : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$. Sabemos que T_p^*M é um espaço linear e chamamos os seus elementos de **vetores tangentes duais** em p.

Para uma base $\{v_\mu\}$ em T_pM define-se univocamente uma base $\{v^\mu\}$ em T_p^*M por

$$v^{\mu}(v_{\nu}) = \delta^{\mu}{}_{\nu} \tag{3}$$

Definimos, então que um **tensor** T do tipo (k, l) sobre um espaço vetorial V como sendo uma função multilinear

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{l} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{4}$$

Portanto, tomando $u^1 \dots u^k$ vetores duais e $v_1 \dots v_l$ vetores, temos que $T(u^1, \dots, u^k, v_1, \dots, v_l)$ é um número real. Além disso, um tensor do tipo (1,0) é precisamente um vetor dual e um tensor do tipo $(0, 1)$ é simplesmente um vetor.

O espaço de todos os tensores do tipo (k, l) é um espaço vetorial de dimensão $k + l$.

Sendo $\{v^\mu\}$ uma base para V^* and $\{v_\nu\}$ uma base para V, podemos escrever as componentes do tensor T como

$$T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} = T(v^{\mu_1}, \dots, v^{\mu_k}, v_{\nu_1}, \dots, v_{\nu_l}) \tag{5}$$

Sendo T um tensor do tipo (k, l) e $T^{'}$ um tensor do tipo $(k^{'}, l^{'})$ e tomando $u^1, \dots, u^k$ e $v^1, \dots, v^{k^{'}}$ vetores duais e $r_1, \dots, r_l$ e $t_1, \dots, t_{l'}$, defini-se o **produto tensorial** $T \otimes T^{'}$ por

$$\begin{split} T \otimes T^{'}(u^1, \dots, u^k, v^1, \dots, v^{k^{'}}, r_1, \dots, r_l, t_1, \dots, t_{l'}) = \\ T(u^1, \dots, u^k, r_1, \dots, r_l) T^{'}(v^1, \dots, v^{k^{'}}, t_1, \dots, t_{l'}) \end{split} \tag{6}$$

Por 5 e 6 podemos escrever um tensor do tipo (k, l) como:

$$T = \sum_{\mu_1=1}^{n} \cdots \sum_{\mu_k=1}^{n} \sum_{\nu_1=1}^{n} \cdots \sum_{\nu_l=1}^{n} T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes v^{\nu_l} \tag{7}$$

Para simplificar, daqui para frente vamos utilizar notação da soma implícita para índices superiores e inferiores repeditos. Por exemplo:

$$\sum_{\mu=1}^{n} S^{\alpha\mu}{}_{\beta\mu} \equiv S^{\alpha\mu}{}_{\beta\mu} \tag{8}$$

Nessa notação 7 fica

$$T = T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}\, v_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes v^{\nu_l} \tag{9}$$

Outra operação muito importante sobre tensores é a contração. Seja um tensor cujas componentes sejam escritas por $T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}$ definimos a **contração** $C_i : \mathscr{T}(k,l) \longrightarrow \mathscr{T}(k-1,l-1)$ por

$$CT^{\mu_1\ldots\mu_{i-1}\mu_{i+1}\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_{i-1}\nu_{i+1}\ldots\nu_l} = T^{\mu_1\ldots\mu_{i-1}\sigma\mu_{i+1}\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_{i-1}\sigma\nu_{i+1}\ldots\nu_l} \tag{10}$$

5 Métrica sobre uma variedade

O conceito de métrica é crucial para atribuir propriedades geométricas às variedades. O tensor métrico g é um tensor do tipo $(0,2)$

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \tag{11}$$

que satisfaz

- Simétrico: $g(u,v) = g(v,u)$ para todos os vetorec $u, v \in V_p$
- Não-degenerado: $g(u,v) = 0 \iff u = 0$ ou $v = 0$

Sendo a métrica um tensor não degenerado, podemos definir uma função linear de V^* em V tal que $v \mapsto g(\cdot, v)$ e essa função é, por definição, bijetora. Portanto, para uma dada métria existe uma correspondência unívoca entre vetores e vetores duais.

$$\begin{aligned} v \mapsto g(\cdot, v) &= g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu(\cdot, v) \\ &= g_{\mu\nu} v^\sigma \delta^\nu{}_\sigma dx^\mu \\ &= g_{\mu\nu} v^\nu dx^\mu \end{aligned}$$

Com isso, é interessante definir

$$v_\mu \equiv g_{\mu\nu} v^\nu \tag{12}$$

Seguindo essa linha, podemos definir um tensor g do tipo $(2,0)$ por

$$g = g^{\mu\nu}\partial_\mu \otimes \partial_\nu \tag{13}$$

A relação entre esse tensor e a métrica e dada por

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha} = \delta^\mu{}_\alpha \tag{14}$$

Com isso, derivamos a relação

$$v^\mu \equiv g^{\mu\nu}v_\nu \tag{15}$$

Temos então na métrica uma forma de levantar e abaixar índices de tensores em geral, o que é muito útil para manipulação de tensores em Relatividade Geral.

6 Derivada Covariante e Transporte Paralelo

Defini-se **derivada covariante** $\nabla_v T$ de um campo tensorial Tcom relação a um vetor v por

- ∇_v é linear: $\nabla_v(\alpha S + \beta T) = \alpha\nabla_v S + \beta\nabla_v T$
- Satisfaz a regra de Libnitz: $\nabla_v(T \otimes S) = \nabla_v T \otimes S + T \otimes \nabla_v S$
- ∇_v aplicada sobre T preserva o seu tipo: $T \in \mathscr{T}(k,l) \Rightarrow \nabla_v T \in \mathscr{T}(k,l)$
- Comutatividade com a operação de contração: $\nabla_v CT = C\nabla_v T$
- $\nabla_v f = v(f)$ para qualquer função $f : M \to \mathbb{R}$
- $\nabla_u \nabla_v f = \nabla_v \nabla_u f$ para qualquer função $f : M \to \mathbb{R}$

Precisamos também definir uma *conexão* para que o conceito de Derivada Covariante esteja completo. Para uma determinada base $\{\partial_\mu\}$ os componentes da conexão $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ são definidos por

$$\nabla_{\partial_\mu}\partial_\nu = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\partial_\alpha \tag{16}$$

Com essas definições, nós adquirimos meios de medir quanto um campo vetorial está variando ao se “caminhar” sobre a variedade.

Portanto, impondo que a o campo não varie sobre determinada curva (derivada covariante igual a zero) chegamos a uma equação cuja solução é o campo que buscamos. Dizemos que esse campo está sendo *paralelamente transportado* sobre a curva.

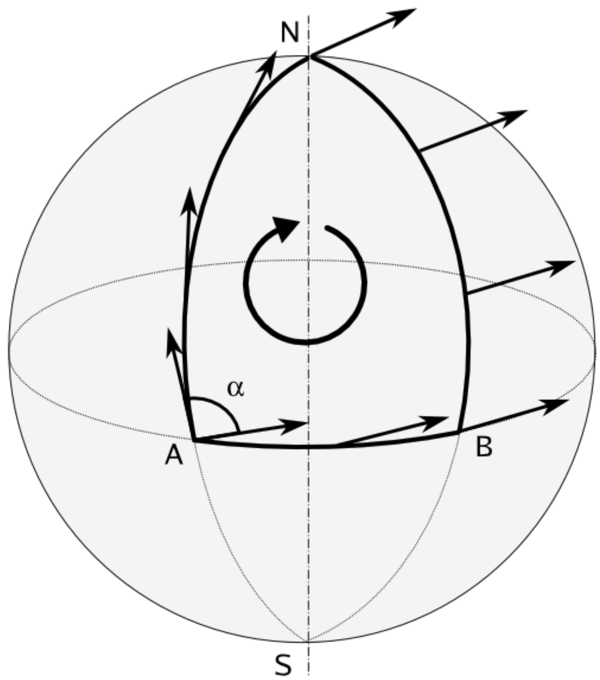

Figura 4: transporte paralelo sobre uma superfície esférica

Dizemos, portanto, que um campo T é transportado paralelamente ao longo de uma curva γ se, e somente se, $\nabla_{\gamma'} T = 0$ sobre γ.

Observadores inerciais (não acelerados) possuem seu vetor velocidade transportados paralelamente ao longo de sua trajetória. Temos então que:

$$\nabla_v v = 0 \therefore \frac{dv^\alpha}{d\tau} + v^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0 \tag{17}$$

Se considerarmos que $\nabla_v g = 0$ para todo $v \in V_p$, temos que o operador ∇ que definimos existe e é único, e temos que as componentes da conexão em uma determinada base $\{\partial_\mu\}$ são descritos unicamente em termos da métrica.

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\nu} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right\} \tag{18}$$

Como vemos acima, podemos obter a *conexão*, e portanto o operador *derivada covariante* a partir da métrica. As coordenadas da conexão, como definidas em 18, são chamadas *símbolos de Christoffel* e são amplamente usadas nos cálculos de transporte paralelo e geodésicas.

7 Curvatura e Geodésicas

Vimos na seção passada, em 17, que observadores inerciais seguem trajetórias bem definidas. Estas trajetórias são as linhas mais "retas" possível em uma geometria curva, e são características intrínsecas da geometria presente na variedade. Estas trajetórias são chamadas de *geodésicas*.

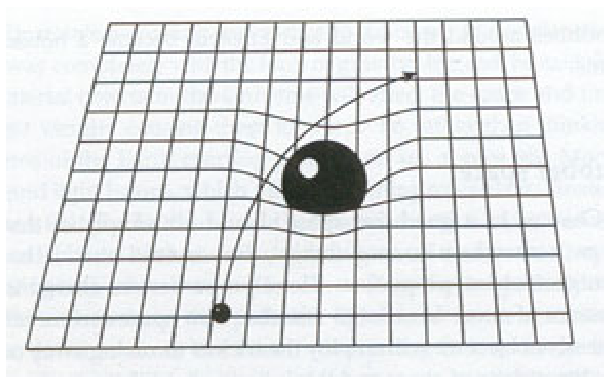

Figura 5: geodésica perto de um corpo de granda massa

Em espaços curvos, geralmente vetores transportados paralelamente ao longo de uma curva fechada não retornam apontando na mesma direção (Figura 4), e essa diferença deve-se à curvatura presente no espaço.

Essa noção é formalizada através de R^d_{abc}, que é o *tensor de curvatura de Riemann*. Esse campo tensorial obedece às seguintes propriedades:

1. ${R_{abc}}^d = -{R_{bac}}^d$
2. ${R_{[abc]}}^d = 0$
3. $R_{abcd} = -R_{abdc}$
4. $\nabla_{[a}{R_{bc]d}}^e = 0$ (identidade de Bianchi)

A partir do tensor de Riemann definimos o *tensor de Ricci*.

$$\textit{(Ricci)} \qquad R_{\mu\nu} = {R_{\mu\alpha\nu}}^{\alpha} \qquad \textit{(Riemann)} \tag{19}$$

e, por fim, o *escalar de curvatura*:

$$\textit{(Escalar de Curvatura)} \qquad R = R_{\mu}{}^{\nu} \qquad \textit{(Ricci)} \tag{20}$$

Abaixo exemplos de espaços com comportamentos distintos para o escalar de curvatura.

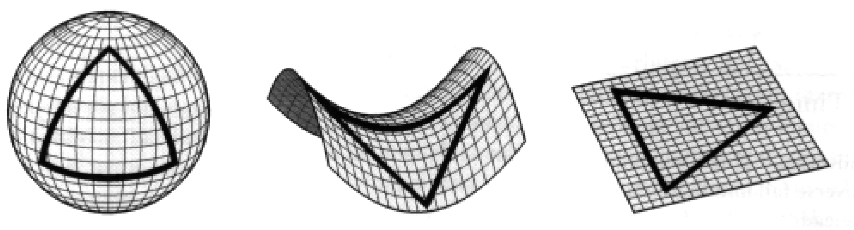

Figura 6: superfícies com curvaturas positiva, negativa e plana

8 Referências

1. WALD, R.M. *General Relativity*
2. G. E. A. MATSAS, In *Campos do Jordao 1997, Particles and fields* 291-344
3. DODSON, C.T.J.; POSTON, T. *Tensor Geometry*