

A NATUREZA DO HORIZONTE DE EVENTOS - BURACOS NEGROS DE SCHWARZSCHILD

Rafaello Virgili ¹

Resumo

Este trabalho discorre sobre a solução de Schwarzschild para as equações de Einstein, em particular sobre o horizonte de eventos. Em um primeiro olhar verifica-se que há uma singularidade sobre essa superfície, ou seja, a solução não está definida no horizonte de eventos. Faz-se portanto uma análise do sistema de coordenadas usado de forma a demonstrar que essa singularidade não é intrínseca da geometria do espaço-tempo. Por fim, demonstra-se que trajetórias que cruzam essa superfície seguem de forma inexorável em direção à singularidade no centro do buraco negro.

¹Bacharel em Física - USP

Sumário

1	Introdução	3
2	Observáveis	4
3	Sistema de coordenadas Kruskal-Szekeres	7
A	Apêndice I - Cálculo do Escalar de Curvatura	9
B	Apêndice II - Métrica nas coordenadas Kruskal-Szekeres	14
C	Referências	18

1 Introdução

O conceito de buraco negro nasce da lei da gravitação que diz que matéria atrai matéria e essa atração é chamada de força gravitacional. A matéria no universo se estrutura em partículas e a interação dessas partículas se dá por forças fundamentais existentes no universo.

Quando tem-se um acúmulo suficiente de matéria a força gravitacional supera as demais forças, fazendo com que a estrutura da matéria colapse sobre si mesma, formando o que se conhece como buraco negro.

As forças gravitacionais envolvidas em tal fenômeno são gigantescas, fazendo com que até mesmo a luz não consiga escapar, justificando assim o título de “buraco negro”.

O físico e astrônomo Karl Schwarzschild chegou em 1916 à primeira solução para as equações de campo de Einstein propostas na Teoria da Relatividade Geral, definindo a métrica para esse modelo e as singularidades que foram evidenciadas por tal métrica.

Apenas em 1960 foi proposta uma solução analítica completa na qual a região do horizonte de eventos não é singular. Tal fato demonstra, portanto, que essa é apenas uma singularidade do sistema de coordenadas pretérito.

2 Observáveis

Como já citado, se a massa de um objeto for suficientemente grande então toda a matéria que o compõe colapsará em um único ponto. Sendo assim, a solução de vácuo das equações de Einstein é válida para todo $r \neq 0$ e possui simetria esférica.

Para esse caso temos a solução de Schwarzschild:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \quad (1)$$

Essa solução deveria valer para todo $r \neq 0$, porém é visível que ela apresenta uma singularidade para $r = 2M$. A questão é saber se a singularidade é intrínseca da geometria do espaço-tempo ou se ela é fruto da escolha do sistema de coordenadas. Analisando como os observáveis se comportam para $r = 2M$ será inferir qual é o caso.

Uma partícula “caindo” radialmente em direção a $r = 0$ e, portanto, com momento angular nulo, obedece à seguinte equação:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - 1 + \frac{2M}{r} \quad \therefore \quad d\tau = - \frac{dr}{\left(\tilde{E}^2 - 1 + \frac{2M}{r}\right)^{1/2}} \quad (2)$$

sendo que o sinal de menos indica que a coordenada r da partícula decresce com o tempo próprio. Sendo assim, o tempo próprio que decorre de a partícula sair do repouso em R e “cair” até $r = 2M$ é expresso por:

$$\Delta\tau = \int_{2M}^R \frac{dr}{\left(\tilde{E}^2 - 1 + \frac{2M}{r}\right)^{1/2}}$$

Para $\tilde{E}^2 > 1$ o integrando é finito e, conseqüentemente, $\Delta\tau$ é finito. Se $\tilde{E}^2 = 1$, o integrando continua finito na região de integração. Se $\tilde{E}^2 < 1$, pela equação (2), $r < 2M/(1 - \tilde{E}^2)$, e dessa forma o integrando também é finito. Portanto, em qualquer caso o tempo próprio da partícula para que ela vá de $r = R$ até $r = 2M$ é finito.

Por definição, $\tilde{E} = -p_0/m$, $U_0 = p_0/m$ e U é a quadrivelocidade da partícula. Então

$$U^0 = \frac{dt}{d\tau} = g^{00}U_0 = \frac{g^{00}p_0}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tilde{E}$$

E portanto

$$dt = \frac{\tilde{E}d\tau}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} = - \frac{\tilde{E}dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\tilde{E}^2 - 1 + \frac{2M}{r}\right)^{1/2}}$$

Fazendo uma mudança de variável $\epsilon \equiv r - 2M$ e admitindo, por simplicidade, que $\tilde{E} = 1$, temos:

$$dt = - \left(\frac{\epsilon + 2M}{\epsilon}\right) \frac{(\epsilon + 2M)^{1/2}}{(2M)^{1/2}} = - \frac{1}{(2M)^{1/2}} \frac{(\epsilon + 2M)^{3/2}}{\epsilon} d\epsilon$$

Para $\epsilon \ll 2M$

$$dt \simeq - \frac{(2M)^{3/2}}{(2M)^{1/2}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\epsilon}{2M}\right) \frac{d\epsilon}{\epsilon} = -2M \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{3}{4M}\right) d\epsilon$$

O termo $-2M/\epsilon$, quando integrado introduz uma parte do tipo $\ln(\epsilon)$, que será calculado nos extremos $\epsilon = R - 2M$ e $\epsilon = 0$.

Este último obviamente diverge. Sendo assim, a coordenada t da partícula diverge quando a partícula chega em $r = 2M$. Portanto o tempo próprio, que é um observável, é finito e o tempo coordenado diverge.

Outra grandeza que não depende de sistemas de coordenadas é o escalar de curvatura R , cujo valor é finito para $r = 2M$. A demonstração desse fato encontra-se no Apêndice I.

Analisando a região em que $r < 2M$ vemos que

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) > 0 \quad \text{e} \quad \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} < 0$$

e portanto em uma trajetória onde $dt = d\theta = d\phi = 0$ temos que $ds^2 = (1 - 2M/r)^{-1} dr^2 < 0$. Ou seja, r é uma coordenada tipo tempo. Analogamente concluímos que, em uma trajetória onde $dr = d\theta = d\phi = 0$, $ds^2 = -(1 - 2M/r) dt^2 > 0$ e portanto t é tipo espaço.

As trajetórias radiais tipo luz obedecem a

$$\frac{dt}{dr} \pm \frac{1}{1 - 2M/r} \quad \therefore \quad t(r) = \pm (r - 2M + 2M \ln |r - 2M|) + c$$

Com essas informações chega-se ao seguinte diagrama “ $t \times r$ ”:

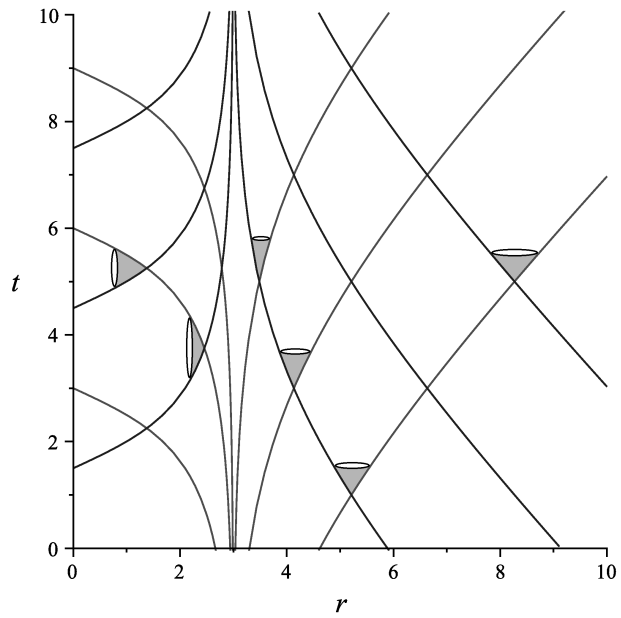


Figura 1: Diagrama $t \times r$

Pelo diagrama percebemos que os cones de luz vão se fechando quando $r \rightarrow \infty$.

Além disso, percebemos que qualquer partícula que esteja em $r < 2M$ terá sua coordenada r diminuindo conforme o seu tempo próprio aumenta, ainda que seja um fóton.

3 Sistema de coordenadas Kruskal-Szekeres

O melhor modo para mostrar que essa é uma singularidade do sistema de coordenadas é apresentar outro sistema de coordenadas que não possua singularidade em $r = 2M$. Tal sistema de coordenadas, proposto por Kruskal-Szekeres, é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} u = (r/2M - 1)^{1/2} e^{r/4M} \cosh(t/4M) \\ v = (r/2M - 1)^{1/2} e^{r/4M} \sinh(t/4M) \end{cases}, \text{ para } r > 2M$$

$$\begin{cases} u = (1 - r/2M)^{1/2} e^{r/4M} \sinh(t/4M) \\ v = (1 - r/2M)^{1/2} e^{r/4M} \cosh(t/4M) \end{cases}, \text{ para } r < 2M$$
(3)

A partir de (3) obtemos a métrica abaixo:

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (dv^2 - du^2) + r^2 d\Omega^2$$

onde r é dado implicitamente por:

$$u^2 - v^2 = \begin{cases} \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) e^{r/2M} \left(\cosh^2 \left(\frac{t}{4M} \right) - \sinh^2 \left(\frac{t}{4M} \right) \right), \text{ para } r > 2M \\ \left(1 - \frac{r}{2M} \right) e^{r/2M} \left(\sinh^2 \left(\frac{t}{4M} \right) - \cosh^2 \left(\frac{t}{4M} \right) \right), \text{ para } r < 2M \end{cases}$$

$$u^2 - v^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) e^{r/2M} \quad (4)$$

O cálculo dessa métrica está explicitado no Apêndice II.

É importante notar que esse sistema de coordenadas, de fato, não possui singularidade em $r = 2M$.

Outra importante característica é que se $ds^2 = d\Omega^2 = 0$, então $du \pm dv$. Ou seja, os cones de luz são como os que encontramos numa solução sem matéria (vácuo). Isso quer dizer que as trajetórias radiais tipo luz fazem sempre 45° com os eixos coordenados.

Por (4) temos que, quando r é constante, os lugares geométricos no plano $u \times v$ são hipérbolas. Quando $r = 2M$, $u = \pm v$ e portanto esse é o cone de luz que intercepta a origem.

Porém $u(r = 2M, t) = v(r = 2M, t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Ou seja, toda a linha $r = 2M$, para qualquer t , está identificada na origem do plano $u \times v$. Como esse sistema de coordenadas não apresenta singularidade em $r = 2M$ então, de fato, esses pontos são os mesmos no espaço-tempo.

Para $r < 2M$ as hipérboles de r constante são tipo espaço e para $r > 2M$ essas hipérboles são tipo tempo. Além disso essas hipérboles tendem assintoticamente para $u \times v$. Isso decorre imediatamente de (4).

O valor mínimo de r é 0 e, portanto, a singularidade de $r = 0$ será uma hipérbole nesse sistema de coordenadas, e ela caracteriza o fim do espaço-tempo nessa representação.

As linhas de t constante, sendo ortogonais às linhas de r constante, são linhas radiais (assim como no espaço de Rindler).

Uma linha de mundo que atravesse a superfície ($r = 2M, t = \infty$) entra na região onde r é uma coordenada tipo tempo e, portanto, está fadada a “cair” na singularidade física ($r = 0$).

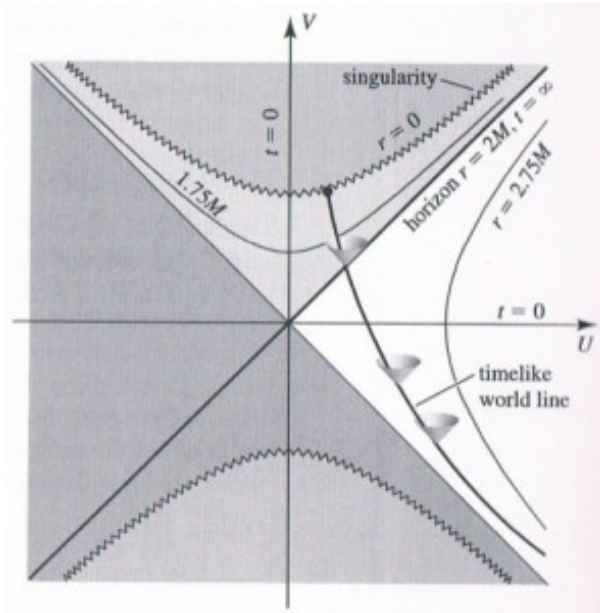


Figura 2: Diagrama $u \times v$. Coordenadas de Krustal-Szkeres

A Apêndice I - Cálculo do Escalar de Curvatura

Para o cálculo do Escalar de Curvatura, devemos primeiramente determinar os símbolos de Christoffel, o que fazemos a partir de:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}),$$

onde as coordenadas da métrica são obtidas do elemento de linha:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

e $g^{\mu\mu} = \frac{1}{g_{\mu\mu}}$, pois a métrica é diagonal. Sendo assim $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas ficam:

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

$$g_{00,r} = -\frac{2M}{r^2}$$

$$g_{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

$$g_{rr,r} = -\frac{2M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2}$$

$$g_{\theta\theta} = r^2$$

$$g_{\theta\theta,r} = 2r$$

$$g_{\phi\phi} = r^2 \text{sen}^2 \theta$$

$$g_{\phi\phi,r} = 2r \text{sen}^2 \theta$$

$$g_{\phi\phi,\theta} = 2r^2 \text{sen} \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2}g^{0\lambda}(g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) = \frac{1}{2}g^{00}(g_{\mu 0,\nu} + g_{\nu 0,\mu} - g_{\mu\nu,0})$$

$$\Gamma_{r0}^0 = \frac{1}{2}g^{00}g_{00,r} = \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^r = \frac{1}{2}g^{r\lambda}(g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) = \frac{1}{2}g^{rr}(g_{\mu r,\nu} + g_{\nu r,\mu} - g_{\mu\nu,r})$$

Se $\mu \neq \nu$, $g_{\mu r, \nu} = g_{\nu r, \mu} = g_{\mu\nu, \lambda} = 0$. Então $\mu = \nu$.

$$\Gamma_{00}^r = -\frac{1}{2}g^{rr}g_{00,r} = \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2}g^{rr}g_{rr,r} = -\frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{1}{2}g^{rr}g_{\theta\theta,r} = 2M - r$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{1}{2}g^{rr}g_{\phi\phi,r} = (2M - r)\text{sen}^2\theta$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\theta &= \frac{1}{2}g^{\theta\lambda}(g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(g_{\mu\theta,\nu} + g_{\nu\theta,\mu} - g_{\mu\nu,\theta}) \end{aligned}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}g_{\phi\phi,\theta} = -\text{sen}\theta \cos\theta$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}g_{\theta\theta,r} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\phi = g^{\phi\lambda}(g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}(g_{\mu\phi,\nu} + g_{\nu\phi,\mu} - \cancel{g_{\mu\nu,\phi}}^0)$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}g_{\phi\phi,r} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}g_{\phi\phi,\theta} = \text{cotg}\theta$$

Tensor de Ricci (coordenadas que interessam para o cálculo de R , $R_{\mu\mu\mu\mu} = 0$)

$$R_{00} = R_{0r0}^r + R_{0\theta0}^\theta + R_{0\phi0}^\phi$$

$$\begin{aligned} R_{0r0}^r &= \Gamma_{00,r}^r - \cancel{\Gamma_{r0,r}^r}^0 + \overbrace{\Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\alpha r}^r}^{\alpha=r} - \overbrace{\Gamma_{r0}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^r}^{\alpha=0} \\ &= -\frac{2M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \frac{M}{r^2} \frac{2M}{r^2} - \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \\ &\quad - \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \\ &= -\frac{2M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \frac{2M^2}{r^4} - \frac{M^2}{r^4} - \frac{M^2}{r^4} \\ &= -\frac{2M}{R^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{0\theta 0} &= \cancel{\Gamma_{00,\theta}^\theta} - \cancel{\Gamma_{\theta 0,0}^\theta} + \overbrace{\Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\alpha\theta}^\theta}^{\alpha=r} - \cancel{\Gamma_{\theta 0}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^\theta} \\
&= \frac{M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{0\phi 0} &= \cancel{\Gamma_{00,\phi}^\phi} - \cancel{\Gamma_{\phi 0,0}^\phi} + \overbrace{\Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\alpha\phi}^\phi}^{\alpha=r} - \cancel{\Gamma_{\phi 0}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^\phi} \\
&= \frac{M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)
\end{aligned}$$

$$R_{00} = -\frac{2M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \frac{M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \frac{M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{R}\right) = 0$$

$$R_{rr} = R_{r0r}^0 + R_{r\theta r}^\theta + R_{r\phi r}^\phi$$

$$\begin{aligned}
R_{r0r}^0 &= \cancel{\Gamma_{rr,0}^0} - \Gamma_{0r,r}^0 + \overbrace{\Gamma_{rr}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^0}^{\alpha=r} - \overbrace{\Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\alpha r}^0}^{\alpha=0} \\
&= -\left[-\frac{2M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \frac{M}{r^2} \right] \\
&\quad - \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - \frac{M^2}{r^4} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \\
&= \frac{2M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} + \frac{2M^2}{r^4} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} - \frac{2M^2}{r^4} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \\
&= \frac{2M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{r\theta r}^\theta &= \cancel{\Gamma_{\theta r,r}^\theta} - \Gamma_{\theta r,r}^\theta + \overbrace{\Gamma_{rr}^\alpha \Gamma_{\alpha\theta}^\theta}^{\alpha=r} - \overbrace{\Gamma_{\phi r}^\alpha \Gamma_{\alpha r}^\theta}^{\alpha=\phi} \\
&= \frac{1}{r^2} - \frac{M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - \frac{1}{r^2} = -\frac{M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{r\phi r}^\phi &= \cancel{\Gamma_{r\phi,\phi}^\phi} - \Gamma_{r\phi,\phi}^\phi + \overbrace{\Gamma_{rr}^\alpha \Gamma_{\alpha\phi}^\phi}^{\alpha=r} - \overbrace{\Gamma_{\phi r}^\alpha \Gamma_{\alpha r}^\phi}^{\alpha=\phi} \\
&= \frac{1}{r^2} - \frac{M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - \frac{1}{r^2} = -\frac{M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$R_{rr} = \frac{2M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - \frac{M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - \frac{M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} = 0$$

$$R_{\theta\theta} = R_{\theta 0\theta}^0 + R_{\theta r\theta}^r + R_{\theta\phi\theta}^\phi$$

$$\begin{aligned} R_{\theta 0\theta}^0 &= \cancel{\Gamma_{\theta\theta,0}^0} \overset{0}{\nearrow} - \cancel{\Gamma_{\theta 0,\theta}^0} \overset{0}{\nearrow} - \overbrace{\Gamma_{\theta\theta}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^0}^{\alpha=r} - \cancel{\Gamma_{\theta\theta}^\alpha \Gamma_{\alpha\theta}^0} \overset{0}{\nearrow} \\ &= (2M-r) \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \\ &= -\frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \\ &= -\frac{M}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\theta r\theta}^r &= \Gamma_{\theta\theta,r}^r - \cancel{\Gamma_{r\theta,\theta}^r} \overset{0}{\nearrow} + \overbrace{\Gamma_{\theta\theta}^\alpha \Gamma_{\alpha r}^r}^{\alpha=r} - \overbrace{\Gamma_{r\theta}^\alpha \Gamma_{\alpha\theta}^r}^{\alpha=\theta} \\ &= -1 - (2M-r) \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - \frac{1}{r} (2M-r) \\ &= -1 + \frac{M}{r} - \frac{2M}{r} + 1 \\ &= -\frac{M}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\theta\phi\theta}^\phi &= \cancel{\Gamma_{\theta\theta,\phi}^\phi} \overset{0}{\nearrow} - \Gamma_{\theta\phi,\theta}^\phi + \overbrace{\Gamma_{\theta\theta}^\alpha \Gamma_{\alpha\phi}^\phi}^{\alpha=r} - \overbrace{\Gamma_{\phi\theta}^\alpha \Gamma_{\alpha\theta}^\phi}^{\alpha=\phi} \\ &= 1 + \cot^2\theta + (2M-r) \frac{1}{r} - \cot^2\theta \\ &= 1 + \frac{2M}{r} - 1 \\ &= \frac{2M}{r} \end{aligned}$$

$$\therefore R_{\theta\theta} = -\frac{M}{r} - \frac{M}{r} + \frac{2M}{r} = 0$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\phi 0\phi}^0 + R_{\phi r\phi}^r + R_{\phi\theta\phi}^\theta$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi 0 \phi}^0 &= \cancel{\Gamma_{\phi\phi,0}^0}^0 - \cancel{\Gamma_{\phi 0,\phi}^0}^0 + \overbrace{\Gamma_{\phi\phi}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^0}^{\alpha=R} - \cancel{\Gamma_{\theta\phi}^\alpha \Gamma_{\alpha\phi}^\theta}^0 \\
&= (2M - r) \text{sen}^2\theta \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \\
&= -\frac{M}{r} \text{sen}^2\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi r \phi}^r &= \Gamma_{\phi\phi,r}^r - \cancel{\Gamma_{r\phi,\phi}^r}^0 + \overbrace{\Gamma_{\phi\phi}^\alpha \Gamma_{\alpha r}^r}^{\alpha=r} - \overbrace{\Gamma_{r\phi}^\alpha \Gamma_{\alpha\phi}^r}^{\alpha=\phi} \\
&= -\text{sen}^2\theta + (2M - r) \text{sen}^2\theta \left(-\frac{M}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - \frac{1}{r} (2M - r) \text{sen}^2\theta \\
&= \text{sen}^2\theta \left(-1 + \frac{M}{r} - \frac{2M}{r} + 1\right) \\
&= -\frac{M}{r} \text{sen}^2\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi\theta\phi}^\theta &= \Gamma_{\phi\phi,\theta}^\theta - \cancel{\Gamma_{\theta\phi,\phi}^\theta}^0 + \overbrace{\Gamma_{\phi\phi}^\alpha \Gamma_{\alpha\theta}^\theta}^{\alpha=r} - \overbrace{\Gamma_{\theta\phi}^\alpha \Gamma_{\alpha\phi}^\theta}^{\alpha=\phi} \\
&= \text{sen}^2\theta - \cos^2\theta + (2M - r) \text{sen}^2\theta \frac{1}{r} + \cotg\theta \text{sen}\theta \cos\theta \\
&= \text{sen}^2\theta - \cos^2\theta - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta \\
&= \frac{2M}{r} \text{sen}^2\theta
\end{aligned}$$

$$\therefore R_{\phi\phi} = -\frac{M}{r} \text{sen}^2\theta - \frac{M}{r} \text{sen}^2\theta + \frac{2M}{r} \text{sen}^2\theta = 0$$

Como $R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} R_{\nu\mu}$ e como a métrica é diagonal, então

$$R = g^{00} R_{00} + g^{rr} R_{rr} + g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} = 0 \quad (5)$$

Portanto o escalar de curvatura associado à métrica de Schwarzschild (1) tem valor 0 para todo ponto onde a métrica estiver definida.

B Apêndice II - Métrica nas coordenadas Kruskal-Szekeres

Temos que as coordenadas de Kruskal-Szekeres para $r > 2M$ são dadas por

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ v &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{aligned}$$

e para $r < 2M$ são dadas por

$$\begin{aligned} u &= \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ v &= \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{aligned}$$

A métrica deste novo sistema de coordenadas será determinada a partir da métrica de Schwarzschild, pela seguinte regra de transformação de coordenadas

$$g'_{\lambda\nu} = \frac{\partial u^\sigma}{\partial u'^\lambda} \frac{\partial u^\rho}{\partial u'^\nu} g_{\sigma\rho} \quad (6)$$

onde o sistema com linhas é o sistema de coordenadas de Kruskal-Szekeres e o sem linhas é o de Schwarzschild. De (6), e lembrando que a métrica de Schwarzschild é diagonal, segue que

$$g_{uu} = \left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2 g_{00} + \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2 g_{rr} \quad (7)$$

onde g_{00} e g_{rr} são elementos da métrica de Schwarzschild. Então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{-1/2} \frac{1}{2M} e^{r/4M} + \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} \frac{1}{4M} e^{r/4M}\right) \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ &= \left[\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{-1/2} + \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2}\right] \frac{1}{4M} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ &= \frac{r}{2M \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2}} \frac{1}{4M} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{aligned}$$

Daí:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 &= \frac{r^2}{4M^2\left(\frac{r}{2M}-1\right)} \frac{1}{16M^2} e^{r/2M} \cosh^2\left(\frac{t}{4M}\right) \\
&= \frac{r^2}{2Mr-4M^2} \frac{1}{16M^2} e^{r/2M} \cosh^2\left(\frac{t}{4M}\right) \\
&= \frac{r}{r-2M} \frac{r}{2M} \frac{1}{16M^2} e^{r/2M} \cosh^2\left(\frac{t}{4M}\right) \\
&= \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{r}{32M^3} e^{r/2M} \cosh^2\left(\frac{t}{4M}\right)
\end{aligned}$$

Agora:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{r}{2M}-1\right)^{1/2} \frac{e^{r/4M}}{4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right)$$

De onde:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 &= \left(\frac{r}{2M}-1\right) \frac{e^{r/2M}}{16M^2} \sinh^2\left(\frac{t}{4M}\right) \\
&= \frac{r-2M}{2M} \frac{1}{16M^2} e^{r/2M} \sinh^2\left(\frac{t}{4M}\right) \\
&= \frac{r-2M}{r} \frac{r}{32M^3} e^{r/2M} \sinh^2\left(\frac{t}{4M}\right) \\
&= \left(1-\frac{2M}{r}\right) \frac{r}{32M^3} e^{r/2M} \sinh^2\left(\frac{t}{4M}\right)
\end{aligned}$$

Tem-se, a partir de (7), que

$$\begin{aligned}
g_{uu} &= -\left(1-\frac{2M}{r}\right) \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} \frac{1}{\sinh^2(t/4M)} \\
&\quad + \left(1-\frac{2M}{r}\right) \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} \frac{1}{\cosh^2(t/4M)} \\
&= \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} \frac{1}{\cosh^2(t/4M) - \sinh^2(t/4M)} \\
&= \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M}
\end{aligned}$$

Calcula-se agora g_{vv} para $r > 2M$, a partir de

$$g_{vv} = \left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)^2 g_{00} + \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2 g_{rr} \quad (8)$$

Acima, g_{00} e g_{rr} são elementos da métrica de Schwarzschild. Para $r > 2M$, a coordenada v pode ser escrita em função da coordenada u por

$$v = u \frac{\sinh(t/4M)}{\cosh(t/4M)}$$

Como valem $d \cosh t / dt = \sinh t$ e $d \sinh t / dt = \cosh t$ e com os cálculos acima de $(\partial u / \partial r)^2$ e $(\partial u / \partial t)^2$,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{r}{32M^3} e^{r/2M} \sinh^2\left(\frac{t}{4M}\right)$$

e

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{r}{32M^3} e^{r/2M} \cosh^2\left(\frac{t}{4M}\right)$$

Então, a partir de (8),

$$\begin{aligned} g_{vv} &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} \frac{1}{\cosh^2(t/4M)} \\ &\quad + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} \frac{1}{\sinh^2(t/4M)} \\ &= \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} \frac{1}{\sinh^2(t/4M) - \cosh^2(t/4M)} \\ &= -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} \end{aligned}$$

Novamente a partir de (7) e (8), calculam-se g_{uu} e g_{vv} , porém agora para $r < 2M$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{-1/2} \left(-\frac{1}{2M}\right) e^{r/4M} + \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} \frac{1}{4M} e^{r/4M} \right] \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ &= -\frac{r}{2M \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2}} \frac{e^{r/4M}}{4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 &= \frac{r^2}{4M^2 \left(1 - \frac{r}{2M}\right)} \frac{e^{r/2M}}{16M^2} \sinh^2\left(\frac{t}{4M}\right) \\ &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{r e^{r/2M}}{32M^3} \sinh^2\left(\frac{t}{4M}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} \frac{e^{r/4M}}{4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{re^{r/2M}}{32M^3} \cosh^2\left(\frac{t}{4M}\right)$$

Por (7):

$$g_{uu} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} \frac{1}{\cosh(t/4M)}$$

$$- \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} \frac{1}{\sinh(t/4M)}$$

$$= \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M}$$

Para $r < 2M$, escreve-se

$$v = u \frac{\cosh(t/4M)}{\sinh(t/4M)}$$

Conforme já foi justificado, pode-se obter $\partial v/\partial r$ e $\partial v/\partial t$ com base nos cálculos análogos já realizados para a coordenada u :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{r}{32M^3} e^{r/2M} \cosh^2\left(\frac{t}{4M}\right)$$

e

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{r}{32M^3} e^{r/2M} \sinh^2\left(\frac{t}{4M}\right)$$

Por (8):

$$g_{vv} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} \frac{1}{\sinh^2(t/4M)}$$

$$- \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} \frac{1}{\cosh^2(t/4M)}$$

$$= -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M}$$

As coordenadas angulares não se modificam e, portanto, a métrica, no sistema de coordenadas de Kruskal-Szekeres, é dada por

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (dv^2 - du^2) + r^2 d\Omega^2$$

C Referências

1. DODSON, C.T.J.; POSTON, T. *Tensor Geometry*
2. SCHUTZ, B.F. *A First Course in General Relativity*
3. WALD, R.M. *General Relativity*
4. WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology*