TRANSFORMADA WAVELETS – ABORDAGEM DE SUA APLICABILIDADE

Aldo Ventura da Silva*

RESUMO

O presente trabalho visou explicitar a composição e utilização da Transformada Wavelets.

Partimos o nosso estudo conhecendo a Wavelet, por seus criadores Jean Morlet (Geofísico) e Alex Grossman (Físico) em 1981, ela constitui uma nova base de estudo quando estamos relacionando sinais diversos, desde freqüências elétricas até análise de sinais em previsões de eventos.

Conhecemos a base de criação da Wavelets, com a Transformada de Fourier, que é uma série matemática onde Fourier afirma que a apresentação de qualquer curva que periodicamente repita ela mesma pode ser representada como a soma das oscilações de seno e/ou co-senos. Em seguida, veremos a Transforma Wavelets, que supre as deficiências que foram encontradas na Transformada de Fourier, assim tornando-se mais aplicável em situações onde a Transformada de Fourier não propunha uma resposta aceitável.

E Finalmente veremos a Transformada Wavelets Contínua e a Transformada Wavelets Discreta, mostrando que idéia principal da transformada wavelet é ser uma transformada pontual e proporcional a escala. Ela analisa o sinal em escalas diferentes e se

* Bacharel em Sistemas de Informação – Universidade de São Paulo (USP)

desloca analisando cada trecho do sinal. Assim, sua aplicabilidade é grande e pode ser utilizado em diversos campos do conhecimento.

Palavras-chave: Transformada Wavelets, Análise de Sinais.

1 INTRODUÇÃO

Existem atualmente diversos métodos para a análise de dados relacionados a freqüências e sinais, e diversos deles possuem aplicações diversas, como compressão de imagens e sons, e previsão do tempo, onde este possui valores passados, que quando arranjados de forma tal, podem servir de base para previsões de valores futuros, estimativas.

Nesse contexto a Transformada de Wavelets vem sendo utilizado como um método que possui aplicabilidade em diversos campos. Tal aplicabilidade deve-se ao fato de a Wavelets possuir características que a fazem se "moldar" a freqüências que alguns métodos não são capazes. Ao se "moldar" a essas freqüências, o método torna-se versátil, e possui uma abordagem de aplicação bem diversificada.

1 WAVELET

Wavelet, fora desenvolvido por Jean Morlet (Geofísico) e Alex Grossman (Físico) em 1981, ela constitui uma nova base de estudo quando estamos relacionando sinais diversos, desde freqüências elétricas até análise de sinais em previsões de eventos.

Entretanto, a teoria de análise de freqüência iniciou-se com os estudos de Jean Fourier em 1807, desenvolvendo as chamadas Séries de Fourier. Para o entendimento da importância das wavelets analisemos brevemente a função matemática de Fourier, no caso, a Transformada de Fourier (TF).

1.1 A Transformada de Fourier

Jean Fourier desenvolveu uma série matemática onde ele afirma que a apresentação de qualquer curva que periodicamente repita ela mesma pode ser representada como a soma das oscilações de seno e/ou co-senos. Para o nosso caso, a representação de sinais com freqüências mistas que não sejam suaves, ou seja, em um sinal temos diversas freqüências que o compõe, é um caso onde a Transformada de Fourier se aplica.

A Transformada de Fourier é uma função matemática que tem como base a separabilidade das freqüências que compõem um sinal. Como exemplo temos a figura 1, onde a união das três primeiras freqüências formam a quarta. A propriedade da Transformada de Fourier visa justamente o caminho inverso, da quarta freqüência obter as três primeiras. Note que ambos sinais são contínuos e possuem, aparentemente, uma periodicidade que provavelmente vieram de oscilações de senos e/ou cossenos.

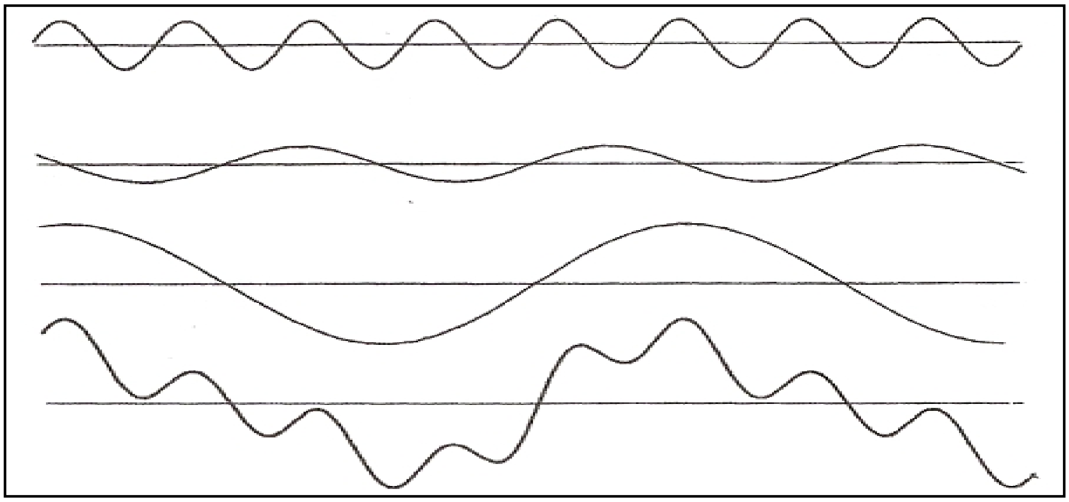


FIGURA 1 – (extraído de BARBOSA et.al, 2008) – Composição de sinal, sendo ela a junção das três acima

A Transformada de Fourier é uma transformada integral que expressa a função em termos de bases senoidais. Analisemos conseguinte a função matemática da Transformada de Fourier (1.1):

$$F(\omega)\int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\Pi\omega x}dx \qquad (1.1)$$

Temos $f(x)$ que é a série temporal ou sinal analisado, □ é a freqüência de cada componente oscilatória inerente ao sinal, ou seja, representa as diversas freqüências contidas na série, e a exponencial representa a transformação para o espaço das freqüências.

Entretanto, a Transformada de Fourier apresenta uma deficiência referente à localização no tempo de um sinal decomposto em suas diversas freqüências. Em 1946, Gabor percebeu que a Transformada de Fourier em séries temporais não–estacionárias, possuía essa deficiência de aplicabilidade, sendo esses casos a maioria dos fenômenos que encontramos, como as freqüências de áudio e elétricas. Para resolver essa deficiência Gabor modificou a Transformada de Fourier visando uma melhor representatividade de séries temporais.

Para obter uma melhor representatividade de séries temporais Gabor utilizou-se da Transformada de Fourier, entretanto, Gabor separou uma série temporal em vários segmentos de períodos fixos, a qual denominamos “janelas”, e em seguida aplica a transformada nesses intervalos, de forma a calcular os coeficientes em partes do sinal, sistematicamente em seqüências de janelamentos. Esta técnica permite obter uma análise substancial das freqüências, porém dependemos do tamanho da janela que pode ou não perder sutilezas encontradas nos sinais. Esta técnica ficou conhecida como Transformada de Fourier em Tempo Restrito(*Short Time Fourier Transform*, ou *STFT*).

A *STFT* fora uma grande contribuição para a análise de séries temporais não-estacionárias. Apesar da grande contribuição de Gabor, dois desafios necessitavam ser resolvidos:

1. O primeiro era que a janela temporal permanecia fixa, não possibilitando sua modificação assim que a aplicação da *STFT* iniciasse;

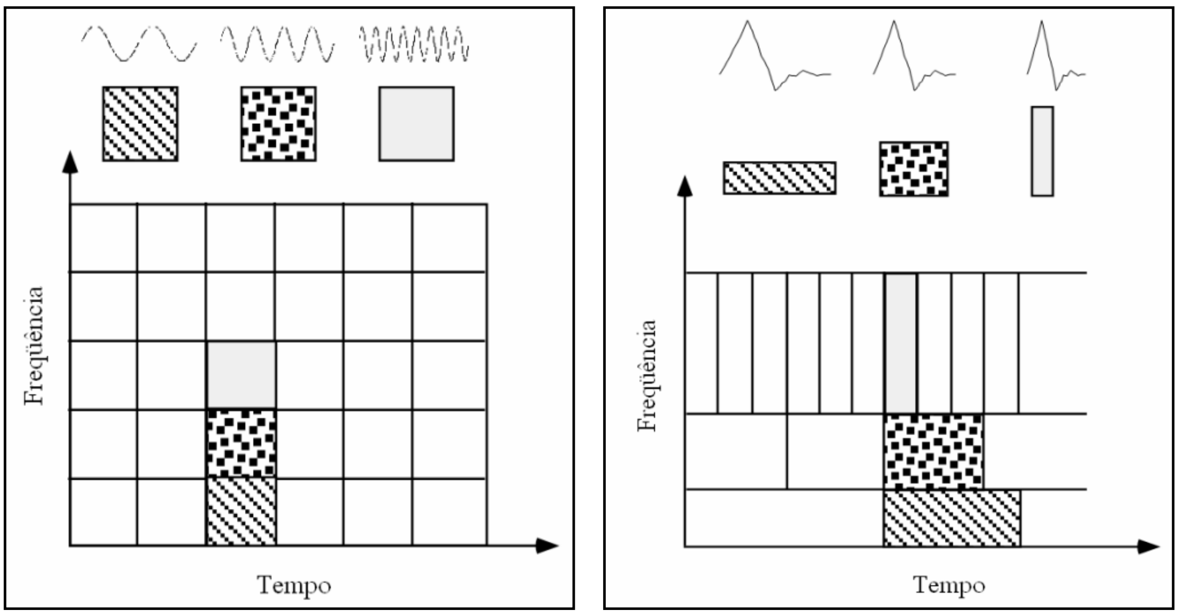
2. O segundo ponto é que as funções trigonométricas possuem energia infinita, sendo elas limitadas entre -infinito e +infinito. Devemos lembrar que as Séries de Fourier têm como base Seno e Co-seno.

Em 1981 Morlet e Grossman desenvolveram uma função matemática que possuía energia finita, ou seja, ela possuía um inicio e um fim, além disso ela poderia dilatar e comprimir o sinal, eliminando o problema de janela temporal fixa que fora encontrada na *STFT*, essa função matemática ficou conhecida como Wavelets.

1.2 A Transformada Wavelet

Com a Transformada de Fourier podíamos analisar sinais separando suas diversas freqüências, entretanto, para séries temporais não-estacionárias encontrávamos problema de análise. Gabor então desenvolveu um método onde fixávamos janelas sistematicamente e em seqüências, dessa forma, podíamos analisar o sinal com alguma perda, devido ao janelamento, que podíamos encontrar em um sinal.

A Wavelet possui suas propriedades para analises de sinais baseados em deficiências encontradas na Transformada de Fourier e na *STFT*. A análise em Wavelet é baseada em freqüência e tempo, ou seja, em resolução e escala (FIGURA 2). Os algoritmos Wavelet processam dados em diferentes escalas e resoluções, permitindo que seja visto tanto o global quanto os detalhes de um sinal (BARBOSA et.al, 2008).



(a) Transformada de Fourier (b) Transformada Wavelet

FIGURA 2 – (extraído de POZZEBON, 2009) – Comparação das transformadas de Fourier e Wavelet

O contraste que temos com a análise da Transformada de Fourier, é que a base utilizada para a Transformada Wavelet pode assumir diversas formas, cada uma com características próprias, tornando-a mais adequada a um determinado número de situações.

Formalmente, para que uma função seja denominada Wavelet, usualmente denotada pela letra *psi* (ψ), deve satisfazer às propriedades a seguir (BARBOSA et.al, 2008):

1. A integral da função Wavelet deve ser zero. Isso garante que a função wavelet tenha uma forma do tipo onda. Essa condição é conhecida como condição de

admissibilidade. A partir da admissibilidade podemos obter a “Transformada Inversa da função wavelet” (1.2).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0 \qquad (1.2)$$

2. A função Wavelet deve ter energia unitária. Isso garante que a função Wavelet possua suporte compacto, ou com um decaimento rápido de amplitude, garantindo a localização temporal (BARBOSA et.al, 2008) (1.3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi(t)^2\right| dt = 1 \qquad (1.3)$$

As propriedades acima, sugerem que $\psi(t)$ tende a oscilar acima e abaixo do eixo t e possuindo sua energia localizada em uma certa região, já que ela é finita.

Essa característica de energia concentrada em uma região finita é o que diferencia a análise de sinais quando se utiliza a Transformada Wavelet da análise utilizando-se a Transformada de Fourier, já que esta última usa as funções trigonométricas (seno e cosseno) que são periódicas, e assim possuem energia infinita.

De acordo com (BARBOSA et.al, 2008), a análise clássica de Fourier, podemos extrair apenas informações no domínio da freqüência da função analisada ou de séries temporais obtidas na natureza, enquanto na análise com Wavelet podemos extrair também informações da função no domínio do tempo, isso caracteriza uma grande vantagem em análise de sinais. Entretanto, as Wavelets não são tão bem localizadas no domínio da freqüência como as funções base de Fourier.

De modo geral, as funções Wavelet possuem a propriedade de dupla localização: em freqüência e em tempo, que são características base da utilização de Wavelet em análise de sinais.

De forma geral, definimos as wavelets pela seguinte fórmula (1.4) (BARBOSA et.al, 2008):

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}.\psi\left(\frac{t-b}{a}\right), a,b \in \mathbb{R},\ a \text{ diferente de 0.} \qquad (1.4)$$

Onde a representa o parâmetro de Dilatação e b é o parâmetro de Translação. A Dilatação mede o grau de compressão e escala, ou seja, "comprimir" e "esticar" a wavelet, já a Translação determina a localização da wavelet no tempo, analogamente seria "deslocar" a wavelet no eixo das abcissas. Se observamos o $|a|>1$, a wavelet $\psi a,b(t)$ tem uma maior espaço no tempo (seria uma versão esticada), correspondendo às baixas freqüências. Mas quando $|a|<1$, temos uma situação inversa à apresentada, no caso, a localização no tempo seria menor (seria uma versão comprimida), correspondendo às altas freqüências. Portanto, as wavelets possuem larguras e tempos adaptados às suas freqüências. (POZZEBON, 2009).

Uma wavelet que seja a base para determinarmos outras, é usualmente denominada Wavelet-Mãe. Através de translações e dilatações da wavelet-mãe podemos obter outras wavelets, essas wavelets são conhecidas como Wavelet-Filhas (POZZEBON, 2009) (BARBOSA et.al, 2008).

A seguir veremos duas versões da transformada wavelet, uma contínua e outra discreta. A Transformada Wavelet Contínua (TWC) faz o mapeamento de uma função de uma variável contínua, em duas variáveis continuas. E a Transformada Wavelet Discreta (TWD) decompões um sinal discreto em diferentes níveis de resolução.

1.3 A Transformada Wavelet Contínua

A Transformada Wavelet Contínua é semelhante a Transformada de Fourier, no sentido de ser baseada em uma única função $\psi(t)$, mas ao contrário da TF, esta função também é deslocada gerando uma família de funções $\psi_{a,b}(t)$ com dois parâmetros definidos (1), também conhecidas como wavelet-filhas.

No trabalho de (POZZEBON, 2009) citando Daubechies, temos a definição da equação de TWC como (1.5):

$$TWC(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{a,b}(t).dt \qquad (1.5)$$

A equação (5.5) mostra que o sinal de uma dimensão f(t) é mapeado em uma nova função em um espaço bidimensional em escala *a*, e translação *b* pela transformada wavelet. O grupo de coeficientes TWC(*a*,*b*) associados a um sinal particular, é a representação wavelet do sinal, ou seja, a nova função obtida através da wavelet-mãe $\psi(f)$ (FIGURA 3).

A idéia principal da transformada wavelet é ser uma transformada pontual e proporcional a escala. Ela analisa o sinal em escalas diferentes e se desloca analisando cada trecho do sinal.

Como dito anteriormente a translação é mover o sinal da esquerda para a direita no eixo das abcissas, e o escalonamento é referente a comprimir e dilatar o sinal.

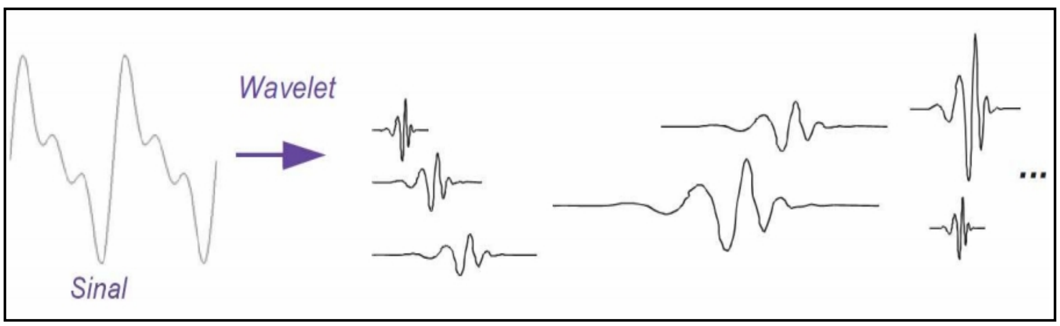


FIGURA 3 – (extraído de POZZEBON, 2009) – Exemplos de funções wavelets, obtidas partir de um wavelet-mãe

1.4 A Transformada Wavelet Discreta

Tomando como base a seção anterior, onde fora declarado que a transformada wavelet contínua é uma representação de uma função com dois parâmetros, sendo eles a escala *a*, e translação *b* (5.5). Em processamentos de sinais, os dados são representados por um conjunto finito de valores. Do ponto de vista matemático, uma representação contínua de uma função de dois parâmetros contínuos *a*, *b* em (1.5) pode ser convertida em uma representação discreta assumindo que *a* e *b* tenham somente valores inteiros (POZZEBON, 2009). Para obtermos a Transformada Wavelet Discreta (TWD), os parâmetros de translação e escalonamento são discretizados. Já a variável independente, isto é, o tempo, permanece contínua (FARIAS, 2008).

A TWD nos fornece um conjunto enumerável de coeficientes, os quais correspondem a pontos em uma grade bidimensional no domínio deslocamento-escala. Essa grade será indexada por dois números inteiros, *m*, que está relacionada ao escalonamento, e *n*, que está relacionado à translação. Para discretizar o parâmetro escala *a* é discretizado de forma exponencial, $a = a_0^m$, enquanto que o parâmetro *b* é discretizado proporcionalmente a $a, b = n \cdot b_0 \cdot a_0^m$. As constantes a_0 e b_0 são comprimentos dos passos discretos de escala e translação, respectivamente (FARIAS, 2008). A TWD de um sinal $f(x)$ é definida como (FARIAS, 2008) citando (CHUI, 1992) (1.6):

$$TWD(m,n) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x).\psi(a_0^{-m}.x - n.b_0)dx \qquad (1.6)$$

Ao contrário da TWC, a TWD só está definida para valores positivos da escala, ou seja, para $a > 0$.Isto não chega a ser uma condição restritiva, pois podemos utilizar uma wavelet refletida para cobrir as escalas negativas.

Para valores grandes de *a*, a resolução no tempo é pequena e os passos de deslocamento são grandes. Para valores pequenos de *a*, a resolução no tempo é grande e os passos de deslocamento são pequenos. Por esse fato o deslocamento é proporcional à escala. Definindo (1.7):

$$a = a_0^j \text{ e } b = n.b_0.a_0^j,\ j,k \in \mathbb{Z} \qquad (1.7)$$

assim, podemos re-escrever a expressão (5.6) da seguinte forma (1.8):

$$TWD(j,k) = a_0^{\frac{-j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x).\psi(a_0^{-j}.x - k)dx \qquad (1.8)$$

Podemos comparar a analise de um sinal das wavelets com a análise de uma material em um microscópio. Para analisar um material, a primeira coisa que devemos fazer é nos mover para o local escolhido, o que seria equivalente na análise wavelets a escolher o valor para k (1.7). Em seguida, devemos escolher o fator de ampliação, ou seja, a^{-j_0}. Como conseqüência, o valor do produto $k.a_0^j$ (1.7) será pequeno produzindo deslocamentos pequenos. Se quisermos visualizar uma área maior, devemos escolher uma ampliação menos e, portanto, $k.a_0^j$ será maior, levando a deslocamentos maiores.

Para uma melhor eficiência computacional, $a_0 = 2$ e $b_0 = 1$, são comumente utilizados para que resultados conduzam para uma dilatação binária de 2^{-j} e uma translação diádica de $k2^j$. Uma discretização prática temos $a = 2^j$ e $b = k2^j$ em (1.8) para que :

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{-j}{2}}.\psi(2^{-j}t - k) \qquad (1.9)$$

Com esta escala de tempo e translação, os valores amostrados $(a,b) = 2^j, k2^j$ são mostrados na figura 4, que representa um diagrama para a TWD, onde cada ponto corresponde a uma função base $\psi\, j,k(t)$ com escala 2^{-j} e translação de tempo de $k2^{-j}$.

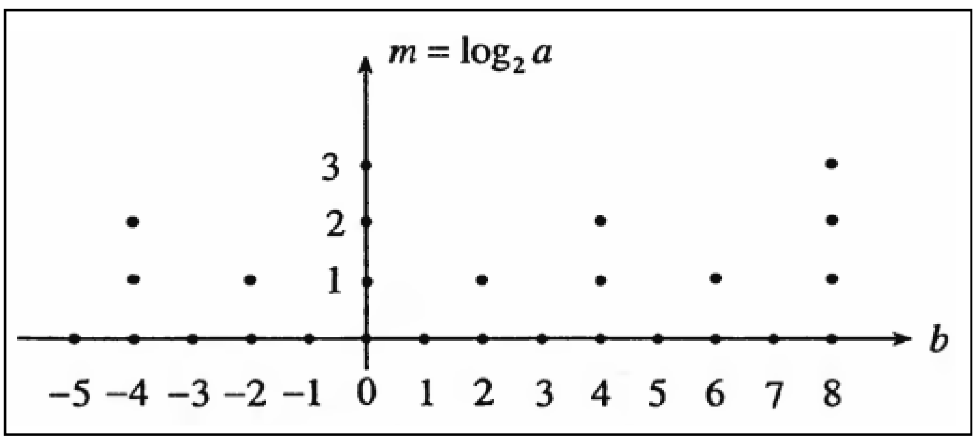


FIGURA 4 – (extraído de POZZEBON, 2009) – Grade de amostragem diádica (2^{-j}) para a transformada wavelet discreta.

2 ÁREAS DE APLICAÇAO

No contexto tecnológico atual, e por meio de suas evoluções, analisar dados torna-se uma necessidade contemporânea e inevitável. Por termos esse contexto, as aplicações em análise de sinais diversos como, a TV digital, HDTV (High Definition TV), compressão de imagens e sons, ou dados que por seu arranjo e sua natureza comportam-se como sinais, análise de dados para previsão do tempo, análise de dados do mercado financeiro para estimativa e previsão de valores diversos, entre outros podemos utilizar a Transformada Wavelets.

Mostraremos a seguir dois exemplos de utilização da Transformada Wavelets.

O Primeiro deles é o trabalho de Castañón, Recuperação de imagens por conteúdo através de análise multiresolução por Wavelets, onde foram estudadas técnicas de extração de características em imagens através da transformada wavelet, as imagens médicas foram os objetos correspondentes do domínio de estudo. O enfoque foi sobre técnicas de caracterização de imagens aproveitando os espaços de wavelet gerados após aplicar os filtros de wavelet, e com isso, montar o vetor de características das medidas estatísticas de espaços (CASTAÑÓN, 2003).

O Segundo trabalho, de Lima, Modelos de previsão de séries temporais financeiras com combinação de filtros de kalman e wavelets, efetuou a combinação de dois filtros, kalman e wavelets, para criar um modelo de previsão com redes neurais que resultassem em uma melhoria significativa se comparado com o filtro único, sem combinação.

O Resultado é que a combinação de um método com wavelets melhorou a qualidade da previsão quando comparados com a simples aplicação de um só em séries temporais financeiras (LIMA, 2011).

3 Conclusão

Neste trabalho, visamos compreender a visão histórica e evolucionista do método da Tranformada Wavelets, onde foi percebido que a Transformada de Fourier, um trabalho inicial e importante para a evolução desse método. Com a Transformada de Fourier podíamos analisar sinais separando suas diversas freqüências, entretanto, para séries temporais não-estacionárias encontrávamos problema de análise, e é justamente nesse contexto que surge a Transformada de Wavelets.

A Transformada Wavelets vem sendo utilizado como um método que possui aplicabilidade em diversos campos. Tal aplicabilidade deve-se ao fato de a Wavelets possuir características que a fazem se “moldar” a freqüências que alguns métodos não são capazes. Ao se “moldar” a essas freqüências que são as séries temporais não-estacionárias, o método torna-se versátil, e possui uma abordagem de aplicação bem diversificada.

Analisamos então duas aplicações distintas da Transformada Wavelets, onde tiramos a conclusão de que o método é versátil e moldável a aplicações de áreas distintas.

REFERÊNCIAS

BARBOSA et.al, 2008 Barbosa,A.C.B. (2) Blitzkow, D. **Ondaletas : Histórico e Aplicação.**(1) Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo – IAG/USP; (2) Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – EPUSP – PTR – LTG. Maio, 2008.

CHUI, C. F. *An Introduction to Wavelets*. San Diego: Academic Press Inc, 1992.

CASTAÑÓN, C. A. B. Recuperação de imagens por conteúdo através de análise multiresolução por Wavelets. 2003. 112 p. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

FARIAS, M. C. Q. **Aplicação da Transformada Wavelet na Compressão de Imagens.**1998. 162 p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

LIMA, F. G. MODELOS DE PREVISÃO DE SÉRIES TEMPORAIS FINANCEIRAS COM COMBINAÇÃO DE FILTROS DE KALMAN E WAVELETS. 2011. 151p. Livre-Docência – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2011.

POZZEBON, G. G. **TRANSFORMADA WAVELET E REDES NEURAIS ARTIFICIAIS NA ANÁLISE DE SINAIS RELACIONADOS À QUALIDADE DA ENERGIA ELÉTRICA**. 2009. 112 p. Dissertação (Mestrado) – Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2009.