MOVIMENTOS UNIDIMENSIONAIS PERIODICAMENTE FORÇADOS

Rafaello Virgilli [1]

Resumo

Muitos problemas em Mecânica Clássica podem ser modelados por uma partícula submetida a uma força periódica em um sistema com apenas um grau de liberdade. Nesse texto vamos analisar uma restrição desse caso, onde impomos algumas condições sobre a força que age sobre a partícula. Tais restrições se mostram bastante interessantes para tratar de alguns problemas em Física, como por exemplo o problema de Sitnikov que será introduzido. Serão caracterizados os tipos de soluções e demonstradas importantes propriedades das condições iniciais e das soluções desse problema.

[1] Bacharel em Física - USP

1 Introdução

O problema conhecido como de Sitnikov é o problema de três corpos representado na figura abaixo:

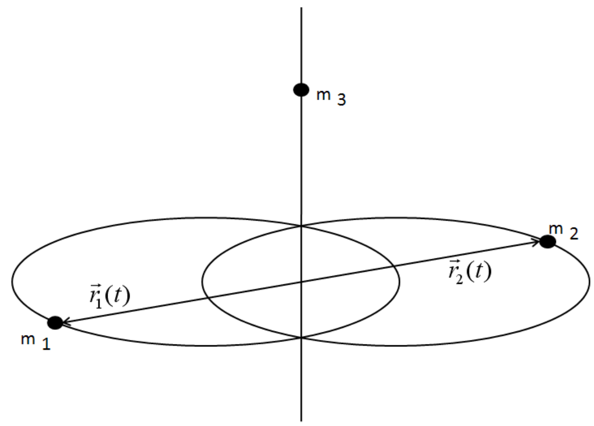

Figura 1: Configuração do problema de Sitnikov

Os corpos que descrevem trajetórias eliptícas têm massas $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$, e são chamados de corpos primários. Nosso interesse é estudar o movimento do terceiro corpo, que tem massa $m_3 \ll m_1 = m_2$, de forma a não interferir sensivelmente no movimento dos corpos primários. Esse corpo se movimenta sobre uma linha ortogonal ao plano de movimento dos corpos primários, que passa pelo centro de massa dos mesmos.

As distâncias $||\overrightarrow{r}_1(t)||$ e $||\overrightarrow{r}_2(t)||$ dos corpos primários ao seu centro de massa O são iguais. Normalizamos o período da órbita dos corpos primários como 2π e consideramos a constante gravitacional unitária. Temos que:

$$\|\overrightarrow{r}(t)\| = \|\overrightarrow{r}_1(t)\| = \|\overrightarrow{r}_2(t)\| = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon\cos(t)) + O(\varepsilon^2).$$

Nomeando o eixo de movimento do corpo de massa m_3, que chamaremos de corpo secundário, de x, a posição deste corpo será dada por $x(t)$. Então sua distância aos corpos primários será dada por:

$$d(t) = \sqrt{r^2(t) + x^2(t)}.$$

Assim, a força de atração gravitacional agindo no corpo secundário será:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{F}(t) &= -\frac{m_1 m_3}{d^2(t)} \frac{\overrightarrow{x}(t) - \overrightarrow{r}_1(t)}{\|\overrightarrow{x}(t) - \overrightarrow{r}_1(t)\|} - \frac{m_2 m_3}{d^2(t)} \frac{\overrightarrow{x}(t) - \overrightarrow{r}_2(t)}{\|\overrightarrow{x}(t) - \overrightarrow{r}_2(t)\|} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{m_3}{d^2(t)} \frac{\overrightarrow{x}(t) - \overrightarrow{r}_1(t)}{\|\overrightarrow{x}(t) - \overrightarrow{r}_1(t)\|} - \frac{1}{2} \frac{m_3}{d^2(t)} \frac{\overrightarrow{x}(t) - \overrightarrow{r}_2(t)}{\|\overrightarrow{x}(t) - \overrightarrow{r}_2(t)\|} \\
&= -\frac{m_3 \overrightarrow{x}(t)}{d^3(t)} = -\frac{m_3 \overrightarrow{x}(t)}{(x^2(t) + r^2(t))^{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{m_3 x(t)}{(x^2(t) + r^2(t))^{\frac{3}{2}}} \overrightarrow{e}_1,
\end{aligned}
$$

onde usamos que $\overrightarrow{r}_1(t) = -\overrightarrow{r}_2(t)$.

Aplicando a segunda lei de Newton:

$$m_3 \ddot{x}(t) = -\frac{m_3 x(t)}{(x^2(t) + r^2(t))^{\frac{3}{2}}},$$

ou seja:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{x(t)}{(x^2(t) + r^2(t))^{\frac{3}{2}}}. \tag{1}$$

Notemos que uma solução qualquer de (1) tem pelo menos um zero. De fato, se $x(t) \neq 0$ para todo t, por (1) vemos que, se $x(t) > 0$ para todo t, $x(t)$ é côncava para baixo, o que não pode ocorrer juntamente com $x(t) > 0$ para todo t. E, se $x(t) < 0$ para todo t, $x(t)$ é côncava para cima, o que não pode ocorrer juntamente com $x(t) < 0$ para todo t.

Suponhamos que $x(t)$ seja uma solução de (1) com condições iniciais:

$$x(t_0) = 0, \dot{x}(t_0) = v_0 > 0\,.$$

Então $\tilde{x}(t) = -x(t)$ é solução do (1) com condições iniciais:

$$\tilde{x}(t_0) = 0, \dot{\tilde{x}}(t_0) = -v_0\,,$$

bastando, portanto, considerarmos $v_0 \geq 0$.

Trataremos do problema de forma mais geral, estudando doravante a equação:

$$\ddot{x} = -Q(x, t), \tag{2}$$

onde $Q(x, t)$ é uma função de x e t provida de certas propriedades que veremos a seguir.

2 A Equação $\ddot{x} = -Q(x,t)$

Consideremos a equação (2) de forma que $Q(x,t)$ satisfaça as seguintes propriedades:

1° - $Q(x,t)$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.

2° - $Q(x,t)$ é ímpar em x e 2π-periódica em t.

3° - $Q(x,t) > 0$ para todo $x > 0$ e para todo $t \in \mathbb{R}$.

4° - Existe uma função $\psi(x)$ integrável em $[0,+\infty)$ tal que:

$$\left|\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\right| \leq \psi(x)\,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ e todo } t \in \mathbb{R}.$$

Definição 1 *Uma solução $x(t)$ de (2) é dita*

• *hiperbólica para $t \to \infty$ quando:*

$$\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = v_\infty \neq 0, \lim_{t\to\infty} x(t) = \pm\infty;$$

• *parabólica para $t \to \infty$ quando:*

$$\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = 0, \lim_{t\to\infty} x(t) = \pm\infty;$$

• *oscilatória para $t \to \infty$ quando existe uma sequência de tempos $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$ com $x(t_n) = 0$, e $x(t) \neq 0$ para algum t.*

De forma análoga definem-se soluções hiperbólicas, parabólicas e oscilatórias para $t \to -\infty$.

Proposição 1 *Cada solução de (2) é parabólica, hiperbólica ou oscilatória para $t \to \infty$, e é parabólica, hiperbólica ou oscilatória para $t \to -\infty$, ou é identicamente nula.*

demonstração: Demonstraremos para $t \to \infty$. A prova para $t \to -\infty$ é análoga.

Como, por 2°, $Q(x,t)$ é ímpar em x, temos que a função identicamente nula é solução de (2).

Seja $x(t)$ uma solução com infinitos zeros no eixo positivo. Seja t_0 um desses zeros. Se $\dot{x}(t_0) = 0$, então $x(t) \equiv 0$, pela unicidade de soluções. Suponhamos então que $\dot{x}(t_0) \neq 0$. Então os zeros não podem estar contidos num conjunto limitado, pois nesse caso eles se acumulariam em algum $\tilde{t}$ e, pela continuidade de solução, teríamos $\dot{x}(\tilde{t}) = 0$, e $x(t)$ seria a solução identicamente nula, e aí teríamos $\dot{x}(t_0) = 0$. Então existe $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$ com $x(t_n) = 0$, e a solução é oscilatória.

Consideremos agora o caso em que $x(t)$ tem um número finito de zeros no semi-eixo positivo. Seja t_0 o máximo destes zeros. Temos:

$$x(t_0) = 0, \dot{x}(t_0) \neq 0.$$

Suponhamos agora, sem perda de generalidade, que $\dot{x}(t_0) > 0$. Assim, $x(t) > 0$ para $t > t_0$. Então, por 3° , $Q(x(t), t) > 0$ para $t > t_0$ e, portanto, $\dot{x}(t)$ é decrescente para $t > t_0$, por (2). Isto é, $\dot{x}(t_2) < \dot{x}(t_1) < \dot{x}(t_0) < \infty$, se $t_0 < t_1 < t_2$. E temos também que $\dot{x}(t) \geq 0$ para todo $t > t_0$, ou $x(t)$ se anularia novamente, o que contraria a definição de t_0. Disso concluímos que $\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = v_\infty$ com $0 \leq v_\infty < \infty$. É claro que esse limite existe, pois, para $t > t_0$, $\dot{x}(t)$ é uma função decrescente e limitada.

Se $v_\infty > 0$, então $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$, e a solução é hiperbólica.

Resta mostrarmos que, com $v_\infty = 0$, $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$. Suponhamos que $\lim_{t\to\infty} x(t) \leq b < \infty$. Integrando (2), obtemos:

$$\int_{t_0}^{\infty} Q(x(s), s)ds = \lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} Q(x(s), s)ds = \lim_{t\to\infty} (\dot{x}(t_0) - \dot{x}(t)) = \dot{x}(t_0).$$

Assim, a integral acima converge. Pelo critério de Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} Q(x(s), s)ds = 0.$$

E então:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} Q(x(s), s)ds = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} Q(x(s + 2\pi n), s + 2\pi n)ds \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} Q(x(s + 2\pi n), s)ds = \int_0^{2\pi} Q(b, s)ds. \end{aligned}$$

Então $\int_0^{2\pi} Q(b, s))ds = 0$, o que contradiz 3° . Logo $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$, e a solução é parabólica.

■

Seja $x(t, v, \tau)$ a solução com condições iniciais:

$$x(\tau, v, \tau) = 0, \quad \dot{x}(\tau, v, \tau) = v.$$

Como $Q(x,t)$ é ímpar em x e 2π-periódica em t, temos que:

$$x(t,v,\tau) \equiv x(t+2\pi,v,\tau+2\pi), \tag{3}$$

$$x(t,-v,\tau) \equiv -x(t,v,\tau). \tag{4}$$

Pelas equações acima vemos que basta considerar, nas condições iniciais, apenas velocidades positivas e instantes iniciais $\tau mod(2\pi)$.

Seja $v > 0$ e (τ,τ') o intervalo maximal onde $x(t,v,\tau)$ permanece positiva, podendo τ' ser infinito. Definimos então:

$$X^+(v,\tau) = \sup_{\tau<t<\tau'} x(t,v,\tau).$$

Se τ' é finito:

$$X^+(v,\tau) = \max_{\tau<t<\tau'} x(t,v,\tau).$$

Ao instante de tempo t em que a solução atinge o valor $X^+(v,\tau)$ chamamos $T^+(v,\tau)$. Esse tempo é determinado univocamente, pois $Q(x,t) > 0$ para $x > 0$. Se $X^+(v,\tau) = \infty$, então a solução $x(t,v,\tau)$ é parabólica ou hiperbólica. Nesse caso, definimos $T^+(v,\tau) = \infty$. Se $X^+(v,\tau)$ é finito, então $\tau' < \infty$, $x(t,v,\tau)$ é côncava e $\dot{x}$ é decrescente, e assim $x(t,v,\tau)$ atinge uma única vez seu máximo $X^+(v,\tau)$.

Definimos $X^+(0,\tau) \equiv 0$.

Vide figura 2. As funções $X^-(v,\tau)$ e $T^-(v,\tau)$ são análogas a $X^+(v,\tau)$ e $T^+(v,\tau)$, respectivamente, e serão posteriormente definidas com mais rigor.

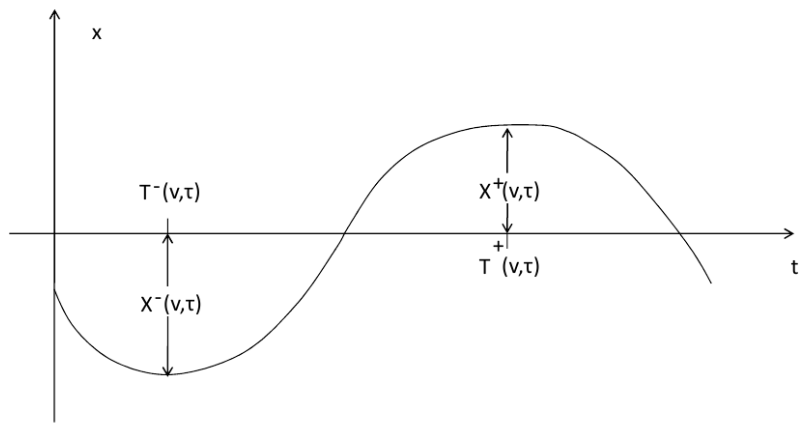

Figura 2: $X^{\pm}(v,\tau)$ e $T^{\pm}(v,\tau)$

Proposição 2 *1 - A função X^+ é contínua para todo τ e $v \geq 0$ e a função T^+ é contínua para todo τ e $v > 0$.*
2- Se $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada inferiormente, $Q(x,t)$ é limitada superiormente e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de velocidades positivas tal que $v_n \to \infty$ e $X^+(v_n,\tau_n) \to \infty$, então $\tau_n' \to \infty$ e, consequentemene, $T^+(v_n,\tau_n) \to \infty$.

demonstração: Primeiramente, demonstremos a parte 1. Consideremos $v_0 > 0$, $\tau_0' < \infty$ e sejam t_1, t_2 tais que $\tau_0 < t_1 < T^+(v_0,\tau_0) < t_2 < \tau_0'$. Temos:

$$\dot{x}(t,v_0,\tau_0) > 0 \;\text{ para }\; t \in [\tau_0,t_1] \;\text{ e }\; \dot{x}(t_2,v_0,\tau_0) < 0$$

e:

$$x(\tau_0,v_0,\tau_0) = 0, \;\; \dot{x}(\tau_0,v_0,\tau_0) = v_0 \neq 0.$$

Pelo teorema da função implícita, existem uma vizinhança $\mathcal{U}$ de (v_0,τ_0), uma vizinhança $\mathcal{V}$ de τ_0 e uma única função $t : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ tal que $x(t(v,\tau),v,\tau) = 0$ para qualquer $(v,\tau) \in \mathcal{U}$. Isso nos permite, localmente, trocar as condições iniciais $(v_0, x(\tau_0,v_0,\tau_0))$ por (v_0,τ_0).

Pelo teorema de dependência contínua em relação às condições iniciais, o ponto (v_0, τ_0) tem uma vizinhança $\mathcal{U}_0$ tal que, para $(v, \tau) \in \mathcal{U}_0$:

$$\dot{x}(t, v, \tau) > 0, \text{ para } \tau \leq t \leq \tau_1, \tag{5}$$

$$\dot{x}(t_2, v, \tau) < 0 \text{ e } |x(t, v, \tau) - x(t, v_0, \tau_0)| < \varepsilon \text{ para } t \in [t_1, t_2]. \tag{6}$$

Por (5) e (6) temos que:

$$t_1 < T^+(v, \tau) < t_2.$$

Como t_1 e t_2 foram escolhidos arbitrariamente próximos de $T^+(v_0, \tau_0)$, concluímos que:

$$\lim_{(v,\tau)\to(v_0,\tau_0)} T^+(v, \tau) = T^+(v_0, \tau_0), \tag{7}$$

isto é, $T^+(v, \tau)$ é uma função contínua para $v > 0$.

Usando a desigualdade triangular:

$$\begin{aligned}
&|X^+(v, \tau) - X^+(v_0, \tau_0)| \\
&= |X^+(v, \tau) - X^+(v_0, \tau_0) - x(t_1, v, \tau) + x(t_1, v, \tau) - x(t_1, v_0, \tau_0) + x(t_1, v_0, \tau_0)| \\
&\leq |X^+(v, \tau) - x(t_1, v, \tau)| + |x(t_1, v, \tau) - x(t_1, v_0, \tau_0)| + |x(t_1, v_0, \tau_0) - X^+(v_0, \tau_0)|.
\end{aligned}$$

Por (7), existe uma vizinhança $\mathcal{V}_0$ de (v_0, τ_0) tal que, se $(v, \tau) \in \mathcal{V}_0$, então:

$$|X^+(v, \tau) - x(t_1, v, \tau)| < \varepsilon$$

e

$$|X^+(v_0, \tau_0) - x(t_1, v_0, \tau_0)| < \varepsilon,$$

se t_1 é suficientemente próximo de τ e de τ_0.

E assim concluímos que $X^+(v, \tau)$ é contínua se $v > 0$.

Tratamos até agora do caso $\tau' < \infty$. Se $\tau' = \infty$, temos:

$$X^+(v_0, \tau_0) = \infty = T^+(v_0, \tau_0).$$

Pelo teorema de dependência contínua em relação às condições iniciais, temos que para qualquer $\varepsilon > 0$ e intervalo compacto $[\tau, t_0] \subset [\tau, \infty]$, se (v, τ) está suficientemente próximo de (v_0, τ_0), então:

$$|x(t, v_0, \tau_0) - x(t, v, \tau)| < \varepsilon,$$

para qualquer $t \in [\tau, t_0]$, o que nos dá que $X^+(v, \tau)$ e $T^+(v, \tau)$ são funções contínuas quando $\tau' = \infty$.

Nos resta mostrar, da primeira parte da proposição, que $X^+(v, \tau)$ é uma função contínua em $v = 0$.

Provaremos por contradição. Suponhamos que exista uma sequência $\{(v_n, \tau_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo a $(0, \tau_0)$ tal que $X^+(v_n, \tau_n) \to \alpha > 0$. Aqui α pode ser finito ou infinito.

Temos que:

$$X^+(v, \tau) = \sup_{t\in(\tau,\tau')} x(t, v, \tau) = \sup_{t\in(\tau,T^+(v,\tau))} x(t, v, \tau).$$

Podemos escolher uma sequência de tempos $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$x(t_n, v_n, \tau_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha' < \alpha,$$

onde podemos supor que α' é um número real positivo.

No intervalo $[\tau_n, t_n]$, $\dot{x}(t, v_n, \tau_n)$ é não crescente, pois $\ddot{x} \leq 0$, e então:

$$0 \leq \dot{x}(t, v_n, \tau_n) \leq v_n. \tag{8}$$

Com isso, segue que:

$$x(t_n, v_n, \tau_n) = \int_{\tau_n}^{t_n} \dot{x}(t, v_n, \tau_n)dt \leq v_n(t_n - \tau_n),$$

de onde:

$$t_n - \tau_n \geq \frac{x(t_n, v_n, \tau_n)}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$

pois $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e $x(t_n, v_n, \tau_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha'$, que é finito.

Então podemos escolher t_n tal que $t_n - 2\pi > \tau_n$. Daí, usando (8):

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_n}^{t_n} \ddot{x}(t, v_n, \tau_n)dt = \dot{x}(t_n, v_n, \tau_n) - \dot{x}(\tau_n, v_n, \tau_n) \\
&\Rightarrow \dot{x}(t_n, v_n, \tau_n) = \int_{\tau_n}^{t_n} \ddot{x}(t, v_n, \tau_n)dt + \dot{x}(\tau_n, v_n, \tau_n) \\
&\Rightarrow \dot{x}(t_n, v_n, \tau_n) = \dot{x}(\tau_n, v_n, \tau_n) - \int_{\tau_n}^{t_n} Q(x(t, v_n, \tau_n), t)dt \\
&\Rightarrow \dot{x}(t_n, v_n, \tau_n) = v_n - \int_{\tau_n}^{t_n} Q(x(t, v_n, \tau_n), t)dt \in [0, v_n].
\end{aligned}$$

Agora:

$$t_n - 2\pi > \tau_n \Rightarrow \int_{t_n-2\pi}^{t_n} Q(x(t, v_n, \tau_n), t)dt \leq \int_{\tau_n}^{t_n} Q(x(t, v_n, \tau_n), t)dt.$$

Portanto:

$$0 \leq \int_{t_n-2\pi}^{t_n} Q(x(t, v_n, \tau_n), t)dt \leq \int_{\tau_n}^{t_n} Q(x(t, v_n, \tau_n), t)dt \leq v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

de onde temos que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_n-2\pi}^{t_n} Q(x(t, v_n, \tau_n), t)dt = 0.$$

Consideremos $t, \bar{t} \in [t_n - 2\pi, t_n]$, com $t < \bar{t}$. Pelo teorema do valor médio, existe $t' \in [t, \bar{t}]$ tal que:

$$\frac{x(\bar{t}, v_n, \tau_n) - x(t, v_n, \tau_n)}{\bar{t} - t} = \dot{x}(t', v_n, \tau_n).$$

Mas, por (8) e como $\bar{t} - t \leq 2\pi$, temos:

$$|x(t, v_n, \tau_n) - x(\bar{t}, v_n, \tau_n)| \leq 2\pi v_n.$$

Consideremos agora $s \in [0, 2\pi]$. Então, pela desigualdade acima:

$$|x(t_n, v_n, \tau_n) - x(t_n - 2\pi + s, v_n, \tau_n)| \leq 2\pi v_n.$$

Logo:

$$\lim_{n\to\infty} |x(t_n, v_n, \tau_n) - x(t_n - 2\pi + s, v_n, \tau_n)| \leq \lim_{n\to\infty} 2\pi v_n = 0,$$

pois $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e portanto, como $x(t_n, v_n, \tau_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha'$, temos que:

$$\lim_{n\to\infty} x(t_n - 2\pi + s, \tau_n) = \alpha'. \tag{9}$$

A integral:

$$\int_{t_n-2\pi}^{t_n} Q(x(t, v_n, \tau_n), t)dt,$$

sob a mudança de variável $u = t - t_n + 2\pi$, será escrita como:

$$\int_0^{2\pi} Q(x(u + t_n - 2\pi, v_n, \tau_n), u + t_n - 2\pi)du.$$

Como $Q(x,t)$ é 2π-periódica em t, ficamos com:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} Q(x(u + t_n - 2\pi, v_n, \tau_n), u + t_n - 2\pi)du \\
&= \int_0^{2\pi} Q(x(u + t_n - 2\pi, v_n, \tau_n), u + t_n(mod 2\pi))du.
\end{aligned}$$

A sequência $\{t_n(mod2\pi)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente em $[0,2\pi]$. Suporemos então que a própria sequência $\{t_n(mod2\pi)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $t_0 \in [0,2\pi]$.

Assim, por (9):

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} Q(x(u + t_n - 2\pi, v_n, \tau_n), u + t_n(mod2\pi))du \\
&= \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} Q(x(u + t_n - 2\pi, v_n, \tau_n), u + t_n(mod2\pi))du \\
&= \int_0^{2\pi} Q(\alpha', u + t_0)du.
\end{aligned}$$

Mas, como $\alpha' > 0$, então $Q(\alpha', u + t_0) > 0$, qualquer $t_0 \in [0,2\pi]$, o que contradiz esta última igualdade. Assim, $X^+(v,\tau)$ é uma função contínua em $v = 0$.

Demonstremos agora a segunda parte da proposição, por contradição:

Suponhamos, atendendo as hipóteses de 2, que exista uma sequência $\{(v_n,\tau_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$X^+(v_n,\tau_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$

$$T^+(v_n,\tau_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} b < \infty,$$

e

$$\tau_n \geq a \geq -\infty.$$

Consideramos, sem perda de generalidade, $\tau(mod 2\pi)$. Passando a uma subsequência, se necessário, consideramos $\tau_n \to \tau_0 \in [0, 2\pi]$. Temos que:

$$\begin{aligned}\int_{\tau_n}^{T^+(v_n,\tau_n)} Q(x(s,v_n,\tau_n),s)ds &= -\int_{\tau_n}^{T^+(v_n,\tau_n)} \ddot{x}(s,v_n,\tau_n)ds \\ &= \dot{x}(\tau_n,v_n,\tau_n) - \dot{x}(T^+(v_n,\tau_n),v_n,\tau_n) \\ &= v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.\end{aligned}$$

Por outro lado, estamos supondo que $Q(x,t)$ é limitado por uma constante C para qualquer $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, e daí:

$$\int_{\tau_n}^{T^+(v_n,\tau_n)} Q(x(s,v_n,\tau_n),s)ds \leq C(T^+(v_n,\tau_n) - \tau_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} C(b-\tau_0) < \infty,$$

e temos uma contradição.

$\blacksquare$

Consideramos agora a média de $Q(x,t)$, dada por:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(x,t)dt.$$

Veremos que podemos obter boas informações sobre o comportamento no infinito das soluções de (2) através das soluções de:

$$\ddot{x} = -Q_0(x). \tag{10}$$

Lema 1 *Se* 4° *é satisfeita, então:*

$$|Q_0(x) - Q(x,t)| \leq 2\pi\psi(x).$$

demonstração: Temos que:

$$\begin{aligned}|Q_0(x) - Q(x,t)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(x,t)dt - Q(x,t)\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi}Q(x,t_x)2\pi - Q(x,t)\right| \\ &= |Q(x,t_x) - Q(x,t)|,\end{aligned}$$

para algum $t_x \in [0, 2\pi]$. Então, utilizando o teorema do valor médio e também 4° :

$$|Q_0(x) - Q(x,t)| = |Q(x,t_x) - Q(x,t)| = \left| \frac{\partial Q(x,\bar{t}_x)}{\partial t} \right| |t_x - t| \leq 2\pi\psi(x).$$

$\blacksquare$

Introduzimos agora a seguinte notação:

$$h^+(v,\tau) = \begin{cases} \frac{v_\infty^2}{2} + \int_0^\infty Q_0(x)dx, & \text{se } X^+(v,\tau) = \infty, \\ \\ \int_0^{X^+(v,\tau)} Q_0(x)dx, & \text{se } X^+(v,\tau) < \infty. \end{cases} \quad (11)$$

Definimos:

$$\Im = \int_0^\infty Q_0(x)dx.$$

Quando (2) é uma equação autônoma, isto é, quando $Q(x,t) \equiv Q_0(x)$, a fórmula (11) coincide com a integral de energia:

$$h(v) \equiv \frac{v^2}{2} \equiv \frac{\dot{x}}{2} + \int_0^x Q_0(y)dy.$$

Proposição 3 *A função $h^+(v,\tau)$ é contínua para todo τ e para todo $v \geq 0$ e satisfaz a desigualdade:*

$$\frac{v^2}{2} - 2\pi \int_0^\infty \psi(x)dx \leq h^+(v,\tau) \leq \frac{v^2}{2} + 2\pi \int_0^\infty \psi(x)dx. \quad (12)$$

Além disso, se existirem funções reais $Q(x)$ e $q(x)$ tais que:

$$0 \leq q(x) \leq Q(x,t) \leq Q(x), \quad (13)$$

então:

$$\frac{v^2}{2} - \int_0^{X^+(v,\tau)} Q(x)dx \leq h^+(v,\tau) - \int_0^{X^+(v,\tau)} Q_0(x)dx \leq \frac{v^2}{2} - \int_0^{X^+(v,\tau)} q(x)dx. (14)$$

demonstração: No intervalo $[\tau, T^+(v,\tau))$ a solução de (2) é monótona crescente em t, pois $\dot{x}(t,v,\tau) > 0$. Então a equação:

$$x(t,v,\tau) = \overline{x}, \;\; \overline{x} \in (0, X^+(v,\tau))$$

admite uma única solução $\overline{t} \in (0, T^+(v,\tau))$. Tomemos agora:

$$f(t,y,v,\tau) = x(t,v,\tau) - y$$

Temos então que:

$$\left.\frac{\partial f(t,y,v,\tau)}{\partial t}\right|_{t=\overline{t}} = \dot{x}(t,v,\tau)|_{t=\overline{t}} \neq 0.$$

Então, se $\overline{y} \in [0, X^+(v,\tau))$, pelo teorema da função implícita, existem abertos $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$, com $(\overline{y}, v, \tau) \in \mathcal{U}$ e com $\overline{t} \in \mathcal{V}$, tais que existe uma única função $t : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ para a qual vale $t(\overline{y}, v, \tau) = \overline{t}$ e $f(t(y,v,\tau), y, v, \tau) = 0$, para qualquer $(y,v,\tau) \in \mathcal{U}$, e $t : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ é diferenciável em $\mathcal{U}$.

Então t é diferenciável em suas entradas, se $\overline{y} \in [0, X^+(v,\tau))$, e é contínua se $\overline{y} \in [0, X^+(v,\tau)]$.

Calculemos a derivada de $t(y,v,\tau)$ com relação a y quando y percorre o intervalo $[0, X^+(v,\tau))$:

$$x(t(y,v,\tau),v,\tau) - y = 0 \Rightarrow \frac{\partial x(t(y,v,\tau),v,\tau)}{\partial t}\frac{\partial t(y,v,\tau)}{\partial y} = 1,$$

o que nos dá:

$$\frac{\partial t(y,v,\tau)}{\partial y} = \left(\frac{\partial x(t(y,v,\tau),v,\tau)}{\partial t}\right)^{-1} = \frac{1}{\dot{x}(t(y,v,\tau),v,\tau)} \tag{15}$$

Temos que $\dot{x}(t(y,v,\tau),v,\tau)$ é contínua em $0 \leq y \leq X^+(v,\tau)$, decrescendo de v a 0 nesse intervalo. Seja:

$$V(y,v,\tau) = \begin{cases} \dot{x}(t(y,v,\tau),v,\tau), & \text{se } \; y \in [0, X^+(v,\tau)), \\ \\ 0, & \text{se } \; y \in [X^+(v,\tau), \infty). \end{cases} \tag{16}$$

Mostremos que $V(y,v,\tau)$ é contínua em $y = X^+(v,\tau)$.

Seja $y_0 = X^+(v_0,\tau_0) < \infty$ e $\varepsilon > 0$. Como $\dot{x}(t(y,v_0,\tau_0),v_0,\tau_0)$ decresce estritamente até 0 quando y cresce até y_0, podemos escolher $y_1 < y_0$ tal que:

$$0 < \dot{x}(t(y_1,v_0,\tau_0),v_0,\tau_0) < \varepsilon.$$

Por continuidade das soluções, existem uma vizinhança $\mathcal{U}_0$ de (v_0, τ_0) tal que, se $(v, \tau) \in \mathcal{U}_0$, então:

$$0 < \dot{x}(t(y_1, v, \tau), v, \tau) < \varepsilon.$$

O conjunto $\{(y, v, \tau) : y > y_1, (v, \tau) \in \mathcal{U}_0\}$ é uma vizinhança de (y_0, v_0, τ_0) e $V(y, v, \tau) < \varepsilon$ nessa vizinhança. Dessa maneira, $V(y, v, \tau)$ é contínua em $y = X^+(v, \tau)$ e, sendo assim, em todo o seu domínio.

Para $0 \leq y < X^+(v, \tau)$, V é diferenciável em seus argumentos:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[\dot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau)] = \ddot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau)\frac{\partial t(y, v, \tau)}{\partial y}.$$

Por (15):

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -Q(y, t(y, v, \tau))\frac{1}{\dot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau)}. \tag{17}$$

Definimos agora:

$$h^+(y, v, \tau) = \begin{cases} \frac{V(y,v,\tau)^2}{2} + \int_0^y Q_0(\xi)d\xi, & \text{se } y \in [0, X^+(v, \tau)), \\ \\ \int_0^{X^+(v,\tau)} Q_0(\xi)d\xi, & \text{se } y \in [X^+(v, \tau), \infty). \end{cases} \tag{18}$$

Essa função é contínua, já que ambas funções que a definem são contínuas e coincidem em $y = X^+(v, \tau)$. E mais, $h^+(y, v, \tau)$ é diferenciável em cada uma das regiões de definição. Derivemos, pois, $h^+(y, v, \tau)$. Como:

$$\begin{aligned} (i) \quad \frac{\partial V(y, v, \tau)^2}{\partial y} &= \frac{\partial \dot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau)^2}{\partial y} \\ &= 2\dot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau)\ddot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau)\frac{\partial t}{\partial y} \\ &= 2\ddot{x}(t(y, v, \tau), v, \tau) = -2Q(y, t(y, v, \tau)), \end{aligned}$$

$$(ii)\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y Q_0(\xi)d\xi = Q_0(y)$$

e

$$(iii)\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{X^+(v,\tau)} Q_0(\xi)d\xi = 0,$$

ficamos com:

$$\frac{\partial h^+(y,v,\tau)}{\partial y} = \begin{cases} Q_0(y) - Q(y,t(y,v,\tau)), & \text{se } y \in [0, X^+(v,\tau)), \\ \\ 0, & \text{se } y \in [X^+(v,\tau), \infty). \end{cases} \tag{19}$$

Portanto, pelo lema 1, ficamos com:

$$\left| \frac{\partial h^+(y,v,\tau)}{\partial y} \right| \leq 2\pi\psi(y),$$

de onde:

$$\left| \int_0^\infty \frac{\partial h^+(y,v,\tau)}{\partial y} dy \right| \leq \int_0^\infty \left| \frac{\partial h^+(y,v,\tau)}{\partial y} \right| dy \leq 2\pi \int_0^\infty \psi(y) dy < \infty,$$

pois $\psi(y)$ é integrável. Então existe o limite:

$$\begin{aligned} \lim_{y\to\infty} h^+(y,v,\tau) &= h^+(0,v,\tau) + \lim_{y\to\infty} \int_0^y \frac{\partial h^+(x,v,\tau)}{\partial x} dx \\ &= h^+(0,v,\tau) + \int_0^\infty \frac{\partial h^+(x,v,\tau)}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

Se em (18) fazemos $y \to \infty$, obtemos (11), ou seja:

$$\begin{array}{ll} h^+(v,\tau) & = \lim_{y\to\infty} h^+(y,v,\tau) \\ & = \frac{v^2}{2} + \int_0^{X^+(v,\tau)} [Q_0(y) - Q(y,t(y,v,\tau))] dy \end{array}. \tag{20}$$

Então, utilizando novamente o lema 1:

$$\begin{aligned} \left| h^+(v,\tau) - \frac{v^2}{2} \right| &= \left| \int_0^{X^+(v,\tau)} [Q_0(y) - Q(y,t(y,v,\tau))] dy \right| \\ &\leq \int_0^{X^+(v,\tau)} |Q_0(y) - Q(y,t(y,v,\tau))| dy \\ &\leq \int_0^\infty |Q_0(y) - Q(y,t(y,v,\tau))| dy \leq 2\pi \int_0^\infty \psi(y) dy, \end{aligned}$$

o que demonstra (12).

Agora, por (20), se vale (13), ficamos com:

$$\frac{v^2}{2} + \int_0^{X^+(v,\tau)} [Q_0(y) - Q(y)]dy \leq h^+(v,\tau) \leq \frac{v^2}{2} + \int_0^{X^+(v,\tau)} [Q_0(y) - q(y)]dy,$$

o que demonstra (14).

■

Para simplificação de alguns argumentos, lançaremos mão da simetria do problema. Primeiramente, $h^+(v,\tau)$ e $X^+(v,\tau)$ têm período 2π em τ, e para $x(t,v,\tau)$ nós levamos em consideração (3). Então é natural considerarmos τ pertencente a $[0,2\pi]$. A equação (4) nos permite considerar $v \geq 0$, e, como $x(t,0,\tau) \equiv X^+(0,\tau) \equiv h^+(0,\tau) \equiv 0$, nós podemos identificar todos os pares $(0,\tau)$ com a origem. Assim, é razoável considerarmos v e τ como coordenadas polares em um plano que agora denotamos por Φ.

Um papel importante é desempenhado pela constante

$$\Im = \int_0^{\infty} Q_0(x)dx,$$

pois o comportamento das soluções depende do fato dessa constante ser ou não infinita. Dividimos então o plano Φ nos seguintes subconjuntos:

$$\{0\} = \{(v,\tau) : v = 0\} = \{(v,\tau) : h^+(v,\tau) = 0\},$$

$$R_0^+ = \{(v,\tau) : 0 < h^+(v,\tau) < \Im\},$$

$$\Pi_0^+ = \{(v,\tau) : h^+(v,\tau) = \Im\}$$

e

$$H_0^+ = \{(v,\tau) : h^+(v,\tau) > \Im\}.$$

Teorema 1 *O conjunto R_0^+ é aberto e não vazio, e se $(v,\tau) \in R_0^+$ a solução associada $x(t,v,\tau)$ retorna ao plano $x = 0$ pelo menos uma vez para $t > \tau$. Se $\Im = \infty$, então todas as soluções não triviais de* (2) *são oscilatórias. Se $\Im < \infty$, então Π_0^+ é não vazio e fechado e a solução $x(t,v,\tau)$ é parabólica para $(v,\tau) \in \Pi_0^+$. H_0^+ é não vazio e aberto e a solução $x(t,v,\tau)$ é hiperbólica para $(v,\tau) \in H_0^+$.*

demonstração: Como $h^+(v,\tau)$ é contínua, temos que R_0^+ e H_0^+ são abertos, enquanto Π_0^+ é fechado, já que a pré-imagem de abertos (respec. fechados) por funções contínuas são abertos (respec. fechados). Por (12), temos que $h^+(v,\tau)$ pode atingir valores arbitrariamente grandes, de onde, se $\Im < \infty$, R_0^+, H_0^+ e Π_0^+ são não vazios.

De (11), é claro que $h^+(v,\tau) > \Im$ se, e somente se, $X^+(v,\tau) = \infty$. Nesse caso, $h^+(v,\tau) - \Im = \frac{v_\infty^2}{2}$, de onde temos $(v,\tau) \in \Pi_0^+ \Rightarrow v_\infty = 0$, isto é, tais pontos são parabólicos, e para os pontos de H_0^+ temos $v_\infty > 0$, ou seja, estes são pontos hiperbólicos.

A solução $x(t,v,\tau)$ é não trivial e retorna a $x = 0$ se, e somente se, $0 < X^+(v,\tau) < \infty$, isto é:

$$0 < h^+(v,\tau) = \int_0^{X^+(v,\tau)} Q_0(x)dx < \Im.$$

Para a solução trivial tem-se $v = 0$, e $h^+(v,\tau) = 0$. Seja agora $\Im = \infty$. Neste caso, $\Phi = \{0\} \bigcup R_0^+$, e então toda solução que cruza $x = 0$ indo para $x > 0$ retorna a $x = 0$, e pela simetria imposta por (4), toda a solução que cruza $x = 0$ indo para $x < 0$ também retorna a $x = 0$, isto é, a solução é oscilatória.

■

Corolário 1 *O conjunto* $\{0\} \bigcup R_0^+$ *está contido em um disco de raio* $(2\Im + 4\pi \int_0^\infty \psi(x)dx)^{\frac{1}{2}}$*, e num disco de raio* $(2\int_0^\infty Q(x)dx)^{\frac{1}{2}}$ *se o lado direito de* (13) *for satisfeito. O conjunto contém um disco de raio* $(2\int_0^\infty q(x)dx)^{\frac{1}{2}}$ *se o lado esquerdo de* (13) *for satisfeito.*

demonstração: Por (12), temos que:

$$\left| h^+(v,\tau) - \frac{v^2}{2} \right| \leq 2\pi \int_0^\infty \psi(x)dx.$$

Como $\{0\} \bigcup R_0^+ = \{(v,\tau) : 0 \leq h^+(v,\tau) < \Im\}$, ficamos com:

$$\Im - \frac{v^2}{2} \leq 2\pi \int_0^\infty \psi(x)dx \Rightarrow v \leq \left(2\Im + 4\pi \int_0^\infty \psi(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se o lado direito de (13) for satisfeito teremos, por (14):

$$
\begin{aligned}
&\frac{v^2}{2} - \int_0^{X^+(v,\tau)} Q(x)dx \leq h^+(v,\tau) - \int_0^{X^+(v,\tau)} Q_0(x)dx \\
&\Rightarrow \frac{v^2}{2} \leq \int_0^{X^+(v\tau)} Q(x)dx - \int_0^{X^+(v,\tau)} Q_0(x)dx \leq \int_0^{\infty} Q(x)dx \\
&\Rightarrow \frac{v^2}{2} \leq \int_0^{\infty} Q(x)dx \Rightarrow v \leq \left(2\int_0^{\infty} Q(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Se o lado esquerdo de (13) for satisfeito teremos, por (14):

$$
\begin{aligned}
&h^+(v,\tau) - \int_0^{X^+(v,\tau)} Q_0(x)dx \leq \frac{v^2}{2} - \int_0^{X^+(v,\tau)} q(x)dx \\
&\Rightarrow h^+(v,\tau) - \int_0^{X^+(v,\tau)} Q_0(x)dx + \int_0^{X^+(v,\tau)} q(x)dx \leq \frac{v^2}{2} \\
&\Rightarrow h^+(v,\tau) - \int_0^{\infty} Q_0(x)dx + \int_0^{X^+(v,\tau)} q(x)dx \leq \frac{v^2}{2}.
\end{aligned}
$$

Em $\{0\}\bigcup R_0^+$ temos que $h^+(v,\tau) - \int_0^{\infty} Q_0(x)dx < 0$. Então, se $(v,\tau) \in \Phi\backslash\{0\}\bigcup R_0^+$, teremos $h^+(v,\tau) - \int_0^{\infty} Q_0(x)dx \geq 0$, e daí:

$$
\begin{aligned}
&\frac{v^2}{2} \geq h^+(v,\tau) - \int_0^{\infty} Q_0(x)dx + \int_0^{X^+(v,\tau)} q(x)dx \\
&\Rightarrow \frac{v^2}{2} \geq \int_0^{X^+(v,\tau)} q(x)dx \geq \int_0^{\infty} q(x)dx \\
&\Rightarrow v \geq \left(2\int_0^{\infty} q(x)dx\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

o que termina a demonstração deste corolário.

■

Os resultados precedentes tratam do comportamento da solução $x(t,v,\tau)$ para $t > \tau$. Definimos $X^-(v',\tau')$ como sendo o supremo do valor absoluto de $x(t,v',\tau')$ no intervalo maximal $\tau \leq t \leq \tau'$ onde temos $|x(t,v',\tau')| \neq 0$ (podemos ter $\tau = -\infty$), e $T^-(v',\tau')$ como o instante em que a solução atinge esse valor. Repetindo os argumentos, conseguimos resultados análogos também para o passado, isto é, para $t < \tau$. Vale notar, no entanto, que os conceitos de "mais"e "menos"não são indênticos. Em particular, $h^+(v,\tau)$ não é necessariamente igual a $h^-(v,\tau)$. Aqui:

$$h^-(v,\tau) = \begin{cases} \frac{v_\infty^2}{2} + \int_0^\infty Q_0(x)dx, & \text{se } X^-(v,\tau) = \infty, \\ \\ \int_0^{X^-(v,\tau)} Q_0(x)dx, & \text{se } X^-(v,\tau) < \infty. \end{cases} \tag{21}$$

Os conjuntos R_0^+, Π_0^+ e H_0^+ também têm seus análogos negativos R_0^-, Π_0^- e H_0^-.

Definição 2 *A aplicação $S : R_0^+ \longrightarrow \Phi$, chamada de aplicação primeiro retorno, leva $(v,\tau) \in R_0^+$ em $(v',\tau') \in \Phi$ de tal forma que:*

$$x(\tau',v,\tau) = 0, \quad \dot{x}(\tau',v,\tau) + v' = 0 \tag{22}$$

e $x > 0$ para $\tau < t < \tau'$.

Observamos que, por (3), (v',τ') é unicamente determinado e, por um teorema de unicidade de soluções de equações diferenciais, a aplicação S é injetora.

Proposição 4
$$X^- \circ S = X^+, \;\; h^- \circ S = h^+, \;\; T^- \circ S = T^+. \tag{23}$$

demonstração: Por (4) e por (22), temos que:

$$x(t,v',\tau') \equiv -x(t,-v',\tau') \equiv -x(t,v,\tau),$$

de onde $X^+(v,\tau) = X^-(v',\tau')$, o que nos dá também que $T^+(v,\tau) = T^-(v',\tau')$ e que:

$$h^-(v',\tau') = \int_0^{X^-(v',\tau')} Q_0(x)dx = \int_0^{X^+(v,\tau)} Q_0(x)dx = h^+(v,\tau),$$

o que demonstra esta proposição.

∎

Corolário 2 $S(R_0^+) = R_0^-$

demonstração: Segue da equação $h^- \circ S = h^+$ e da versão “menos”do teorema 1.

$\blacksquare$

Proposição 5 *A aplicação* $S : R_0^+ \longrightarrow R_0^-$ *é um difeomorfismo que preserva o elemento de área* $vdvd\tau$ *em* Φ. *Se definirmos* $S(0) = 0$, *então a aplicação* $S : R_0^+ \bigcup\{0\} \longrightarrow R_0^- \bigcup\{0\}$ *é um homeomorfismo que preserva* $vdvd\tau$.

demonstração: Definimos a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rccc} F: & R_0^+ \times R_0^- & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (v, \tau, v', \tau') & \longmapsto & (x(\tau', v, \tau), \dot{x}(\tau', v, \tau) + v') \end{array}$$

Para essa aplicação tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(v,\tau,v',\tau')}{\partial(v',\tau')} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x(\tau',v,\tau)}{\partial v'} & \frac{\partial x(\tau',v,\tau)}{\partial \tau'} \\ \frac{\partial[\dot{x}(\tau',v,\tau)+v']}{\partial v'} & \frac{\partial[\dot{x}(\tau',v,\tau)+v']}{\partial \tau'} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & \dot{x}(\tau',v,\tau) \\ 1 & \ddot{x}(\tau',v,\tau) \end{vmatrix} = -\dot{x}(\tau',v,\tau) = v' \neq 0. \end{aligned}$$

Consideremos agora $(\overline{v}, \overline{\tau}, \overline{v}', \overline{\tau}')$ tal que $S(\overline{v}, \overline{\tau}) = (\overline{v}', \overline{\tau}')$. Pelo jacobiano acima e pelo teorema da função implícita, existem abertos $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ com $(\overline{v}, \overline{\tau}) \in \mathcal{U}$ e com $(\overline{v}', \overline{\tau}') \in \mathcal{V}$ e existe uma única função $g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$, com a mesma classe de diferenciabilidade de F, tal que $g(\overline{v}, \overline{\tau}) = (\overline{v}', \overline{\tau}')$ e tal que $F(v, \tau, g(v, \tau)) = F(\overline{v}, \overline{\tau}, \overline{v}', \overline{\tau}') = (0, 0)$.

Como g é única, temos que $g = S$. Como S é bijetora, S é um difeomorfismo de R_0^+ em R_0^-.

Pela proposição 2 a função $X^+(v, \tau)$ é contínua para qualquer τ e para qualquer $v \geq 0$. Analogamente, prova-se que $X^-(v, \tau)$ também o é.

Consideremos então uma sequência $\{v_n, \tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $v_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ e $\tau_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \tau_0$. Sabemos que $X^{\pm}(v, \tau) = 0$ se, e somente se, $v = 0$. Seja $(v_n', \tau_n') = S(v_n, \tau_n)$. Usamos que $X^+ = X^- \circ S$. Então:

$$(X^- \circ S)(v_n, \tau_n) = X^+(v_n, \tau_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} X^+(0, \tau_0) = 0,$$

de onde:

$$X^-(S(v_n,\tau_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

o que significa que $S(v_n,\tau_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, isto é, $S(v,\tau)$ é uma função contínua na origem. Portanto, $S : R_0^+ \bigcup\{0\} \longrightarrow S : R_0^- \bigcup\{0\}$ é um homeomorfismo.

Agora nos falta somente provar que S preserva a área.

A equação (2) é equivalente ao sistema canônico:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial v} \\ \\ \dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}, \tag{24}$$

com a Hamiltoniana:

$$H(x,v) = \frac{v^2}{2} + \int_0^x Q(y,t)dy. \tag{25}$$

Lançamos mão do seguinte teorema:

Teorema 2 *(Poincarè-Cartan). Seja o sistema Hamiltoniano:*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial v} \\ \\ \dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases},$$

Suponha que γ_1 e γ_2 são duas curvas envolvendo o mesmo tubo de trajetórias do hamiltoniano acima. Então a integral da forma vdx - Hdt é a mesma ao longo de γ_1 e γ_2:

$$\oint_{\gamma_1} vdx - Hdt = \oint_{\gamma_2} vdx - Hdt$$

Por esse teorema, a forma $vdx - Hdt$ é preservada pelo fluxo. Este fluxo, quando restrito ao plano $x = 0$, é a aplicação S. E em $x = 0$ temos que essa forma se reduz a $-Hdt$. Agora, por (25), temos que, restrita ao plano $x = 0$ tal forma reduz-se a:

$$-Hdt = -\left[\frac{v^2}{2} + \int_0^0 Q(y,t)dy\right]dt = -\frac{v^2}{2}dt,$$

cuja derivada é o elemento de área $-vdv \wedge dt$.

Seja então $G \subset R_0^+$ a região limitada pela curva fechada $\gamma = \{(v(\alpha), \tau(\alpha)) : \alpha \in [0,1)\}$, seja SG a região limitada por $S\gamma : \{(v'(\alpha), \tau'(\alpha)) : \alpha \in [0,1)\}$ e seja μ a área. O contorno $\Gamma' = \{(x,v,t) = (0, v'(\alpha), \tau'(\alpha))\}$ é obtido a partir de $\Gamma = \{(x,v,t) = (0, v(\alpha), \tau(\alpha))\}$ por um deslocamento sobre as trajetórias do sistema (24) (deslocamentos de diferentes magnitudes para tempos diferentes). Usando o teorema 2, temos que:

$$\mu(G) = \oint_\gamma \frac{v^2}{2} d\tau = -\oint_\Gamma [vdx - Hdt] = -\oint_{\Gamma'} [vdx - Hdt] = \oint_{S\gamma} \frac{v'^2}{2} d\tau' = \mu(SG).$$

Então S preserva a área.

$\blacksquare$

Consideramos agora a possibilidade de diversas iterações da aplicação $S(v,\tau)$.

Se $S(v,\tau) = (v', \tau') \in R_0^+$, podemos falar de $S^2(v,\tau)$. A solução associada $x(t,v,\tau)$ então retorna a $x = 0$ ao menos 2 vezes para $t > \tau$. Se, por exemplo, $(v,\tau) \in S^{-1}(H_0^+ \bigcap R_0^-)$, então $(v',\tau') \in H_0^+$, e portanto a solução $x(t,v,\tau)$ retorna a $x = 0$ uma vez para $t > \tau$ e então diverge hiperbolicamente.

Para $n \geq 1$, definimos recursivamente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_n^+ = S^{-1}(H_{n-1}^+ \bigcap R_0^-), & H^+ = \bigcup_{n=0}^\infty H_n^+ \\ \Pi_n^+ = S^{-1}(\Pi_{n-1}^+ \bigcap R_0^-), & \Pi^+ = \bigcup_{n=0}^\infty \Pi_n^+ \\ R_n^+ = S^{-1}(R_{n-1}^+ \bigcap R_0^-), & R^+ = \bigcap_{n=0}^\infty R_n^+ \end{array} \right. \tag{26}$$

e

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_n^- = S(H_{n-1}^- \bigcap R_0^+), & H^- = \bigcup_{n=0}^\infty H_n^- \\ \Pi_n^- = S(\Pi_{n-1}^- \bigcap R_0^+), & \Pi^- = \bigcup_{n=0}^\infty \Pi_n^- \\ R_n^- = S(R_{n-1}^- \bigcap R_0^+), & R^- = \bigcap_{n=0}^\infty R_n^- \end{array} \right. \tag{27}$$

Nota-se que, se $(v,\tau) \in H_n^+$, a solução associada $x(t,v,\tau)$ retorna n vezes ao plano $x = 0$ e então diverge hiperbolicamente. Se $(v,\tau) \in \Pi_n^+$, a solução $x(t,v,\tau)$ retorna n vezes ao plano $x = 0$ e então diverge parabolicamente. Se $(v,\tau) \in R_n^+$, $x(t,v,\tau)$ retorna pelo menos $n+1$ vezes ao plano $x = 0$. O conjunto H^+ é o conjunto de (v,τ) tal que $x(t,v,\tau)$ é hiperbólica pra para $t \to \infty$, Π^+ é o conjunto de (v,τ) tal que $x(t,v,\tau)$ é parabólica para $t \to \infty$ e R^+ é o conjunto de (v,τ) tal que $x(t,v,\tau)$ é oscilatória para $t \to \infty$. Analogamente para (27).

Proposição 6 *Para todo $n \geq 1$ temos:*

$$\begin{array}{l} R_{n-1}^{+} = R_n^{+} \bigcup \Pi_n^{+} \bigcup H_n^{+}, \\ R_{n-1}^{-} = R_n^{-} \bigcup \Pi_n^{-} \bigcup H_n^{-}. \end{array} \tag{28}$$

A solução $x(t, v, \tau)$ é hiperbólica, parabólica ou oscilatória para $t \to \infty$ (respec. para $t \to -\infty$) se, e somente se, $(v, \tau) \in H^+, \Pi^+$ ou R^+ (respec. $(v, \tau) \in H^-, \Pi^-$ ou R^-), respectivamente. Além disso:

$$\Phi \backslash \{0\} = H^+ \bigcup \Pi^+ \bigcup R^+ = H^- \bigcup \Pi^- \bigcup R^-.$$

Os conjuntos H_n^+, H^+, H_n^-, H^-, R_n^+ e R_n^- são abertos, $\Pi_0^+ \bigcup \cdots \bigcup \Pi_n^+$ e $\Pi_0^- \bigcup \cdots \bigcup \Pi_n^-$ são fechados, Π^+ e Π^- são do tipo F_σ e R^+ e R^- são do tipo G_δ.

demonstração: Apliquemos S na primeira equação de (28):

$$\begin{aligned} S(R_{n-1}^{+}) &= S(R_n^{+} \bigcup \Pi_n^{+} \bigcup H_n^{+}) \\ &= S(R_n^{+}) \bigcup S(\Pi_n^{+}) \bigcup S(H_n^{+}) \\ &= (R_{n-1}^{+} \bigcap R_0^{-}) \bigcup (\Pi_{n-1}^{+} \bigcap \Pi_0^{-}) \bigcup (H_{n-1}^{+} \bigcap H_0^{-}) \\ &= (R_{n-1}^{+} \bigcup \Pi_{n-1}^{+} \bigcup H_{n-1}^{+}) \bigcap R_0^{-}. \end{aligned}$$

Então a primeira equação de (28) é equivalente a:

$$S(R_{n-1}^{+}) = (R_{n-1}^{+} \bigcup \Pi_{n-1}^{+} \bigcup H_{n-1}^{+}) \bigcap R_0^{-}. \tag{29}$$

Vamos agora provar a primeira equação de (28) por indução finita, utilizando sua equivalência com (29).

Para $n = 1$, (29) é:

$$S(R_0^{+}) = R_0^{-},$$

que procede.

Suponhamos que a primeira equação de (28) vale para $n = j - 1$. Mostremos que (29) (que lhe é equivalente) vale para $n = j$:

$$\begin{aligned} R_j^{+} &= S^{-1}(R_{j-1} \bigcap R_0^{-}) = S^{-1}((R_j^{+} \bigcup \Pi_j^{+} \bigcup H_j^{+}) \bigcap R_0^{-}) \\ &\Rightarrow S(R_j^{+}) = (R_j^{+} \bigcup \Pi_j^{+} \bigcup H_j^{+}) \bigcap R_0^{-} \end{aligned}$$

e isso prova (29) e, portanto, a primeira equação de (28).

A segunda equação de (28) demonstra-se de maneira análoga.

Temos que:

$$\Phi\backslash\{0\} = R_0^+ \bigcup \Pi_0^+ \bigcup H_0^+.$$

Como $R_0^+ = R_1^+ \bigcup \Pi_1^+ \bigcup H_1^+$, por (28), ficamos então com:

$$\Phi\backslash\{0\} = R_1^+ \bigcup \Pi_1^+ \bigcup H_1^+ \bigcup \Pi_0^+ \bigcup H_0^+.$$

Procedendo dessa forma sucessivamente, obtemos:

$$\Phi\backslash\{0\} = R_n^+ \bigcup (\bigcup_{k=0}^{n} \Pi_k^+) \bigcup (\bigcup_{k=0}^{n} H_k^+).$$

Como $R_{n+1}^+ \subset R_n^+$, temos que:

$$R_n^+ = \bigcap_{k=0}^{n} R_k^+.$$

Assim:

$$\Phi\backslash\{0\} = (\bigcap_{k=0}^{n} R_k^+) \bigcup (\bigcup_{k=0}^{n} \Pi_k^+) \bigcup (\bigcup_{k=0}^{n} H_k^+).$$

Como:

$$(\bigcup_{k=0}^{n} \Pi_k^+) \bigcup (\bigcup_{k=0}^{n} H_k^+) \subset (\bigcup_{k=0}^{\infty} \Pi_k^+) \bigcup (\bigcup_{k=0}^{\infty} H_k^+),$$

ficamos com:

$$\Phi\backslash\{0\} = (\bigcap_{k=0}^{n} R_k^+) \bigcup (\bigcup_{k=0}^{\infty} \Pi_k^+) \bigcup (\bigcup_{k=0}^{\infty} H_k^+).$$

E mais, se (v, τ) não está nem em $\bigcup_{k=0}^{\infty} \Pi_k^+$ e nem em $\bigcup_{k=0}^{\infty} H_k^+$, então $(v, \tau) \in R^+$. Então podemos fazer:

$$\Phi\backslash\{0\} = (\bigcap_{k=0}^{\infty} R_k^+) \bigcup (\bigcup_{k=0}^{\infty} \Pi_k^+) \bigcup (\bigcup_{k=0}^{\infty} H_k^+) = R^+ \bigcup \Pi^+ \bigcup H^+$$

e, analogamente:

$$\Phi\backslash\{0\} = R^{-} \bigcup \Pi^{-} \bigcup H^{-}.$$

Os conjuntos H_0^+, H_0^-, R_0^+ e R_0^- são abertos e $S : R_0^+ \bigcup\{0\} \longrightarrow R_0^- \bigcup\{0\}$ é um homeomorfismo. Logo, por (26) e por (27), os conjuntos H_n^+, H^+, H_n^-, R_n^+ e R_n^- são abertos e os conjuntos R^+ e R^- são do tipo G_δ. O conjunto Π_0^+ é fechado em Φ, e então $\Pi_0^+ \bigcap R_0^-$ é relativamente fechado em $R_0^- \bigcup\{0\}$, de onde $\Pi_1^+ = S^{-1}(\Pi_0^+ \bigcap R_0^-)$ é relativamente fechado em $S^{-1}(R_0^- \bigcup\{0\}) = R_0^+ \bigcup\{0\}$. Mas então $\Pi_0^+ \bigcup \Pi_1^+$ é fechado em Φ, já que a fronteira de $R_0^+ \bigcup\{0\}$ é Π_0^+. Por indução $\Pi_0^+ \bigcup \Pi_1^+ \bigcup \cdots \bigcup \Pi_n^+$ é fechado, e então Π^+ é do tipo F_δ. De forma semelhante, mostramos que $\Pi_0^- \bigcup \Pi_1^- \bigcup \cdots \bigcup \Pi_n^-$ é fechado e que Π^- é do tipo F_δ.

$\blacksquare$

Da proposição acima, todos os conjuntos em (26) e em (27) são mensuráveis segundo Lebesgue. A medida $\mu = v dv d\tau$ é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, de onde os conjuntos em questão são mensuráveis com respeito a μ.

Consideramos agora a decomposição do plano Φ gerada pelas partições:

$$\Phi = \{0\} \bigcup R^+ \bigcup [\bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n^+] \bigcup \Pi_0^+ \bigcup [\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^+] \bigcup H_0^+ \tag{30}$$

e

$$\Phi = \{0\} \bigcup R^- \bigcup [\bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n^-] \bigcup \Pi_0^- \bigcup [\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^-] \bigcup H_0^-. \tag{31}$$

Nos conjuntos Π_0^+ e H_0^+ a aplicação S não está definida, e em Π_0^- e H_0^- a aplicação S^{-1} não está definida. Intersecções de pares de elementos das decomposições (30) e (31) são feitas de acordo com o seguinte esquema:

Proposição 7 *Para todo $n \geq 1$ e $m \geq 0$:*

$$S(R^+ \bigcap R^-) = R^+ \bigcap R^-, \qquad S(R^+ \bigcap \Pi_m^-) = R^+ \bigcap \Pi_{m+1}^-,$$
$$S(R^+ \bigcap H_m^-) = R^+ \bigcap H_{m+1}^-, \qquad S(H_n^+ \bigcap R^-) = H_{n-1}^+ \bigcap R^-,$$
$$S(H_n^+ \bigcap \Pi_m^-) = H_{n-1}^+ \bigcap \Pi_{m+1}^-, \quad S(H_n^+ \bigcap H_m^-) = H_{n-1}^+ \bigcap H_{m+1}^-,$$
$$S(\Pi_n^+ \bigcap R^-) = \Pi_{n-1}^+ \bigcap R^-, \qquad S(\Pi_n^+ \bigcap \Pi_m^-) = \Pi_{n-1}^+ \bigcap \Pi_{m+1}^-,$$
$$S(\Pi_n^+ \bigcap H_m^-) = \Pi_{n-1}^+ \bigcap H_{m+1}^-.$$

demonstração: Se uma dada solução $x(t, v, \tau)$ retornaria k vezes ao plano $x = 0$ para $t > \tau$, a solução $x(t, v', \tau')$, onde $(v', \tau') = S(v, \tau)$, retornará $k - 1$ vezes ao plano $x = 0$ para $t > \tau'$, o que faz com que S diminua os índices dos conjuntos H_n^+ e Π_n^+ das igualdades acima em 1. Analogamente, se a solução $x(t, v, \tau)$ retornaria k vezes ao plano $x = 0$ para $t < \tau$, a solução $s(t, v', \tau')$ retornará $k + 1$ vezes para $t < \tau'$, o que faz com que a aplicação de S nos conjuntos H_m^- e Π_m^- aumente seus índices em 1. Os símbolos R, H e Π não mudam, pois o fato de irmos de um zero da solução para outro não altera seu comportamento.

■

Teorema 3 *Quase todas as soluções que são oscilatórias para $t \to -\infty$ também o são para $t \to \infty$. Quase todas as soluções que são hiperbólicas ou parabólicas para $t \to -\infty$ também são parabólicas ou hiperbólicas para $t \to \infty$.*

demonstração: Se $\Im = \infty$, então $\Phi \backslash \{0\} = R^+ = R^-$, e temos a tese demonstrada, pelo teorema 1.

Consideremos então $\Im < \infty$. Pelo corolário 1, R_0^+ e R_0^- estão contidos em discos de raios finitos. O mesmo vale para R^+ e R^-, já que estes estão contidos em R_0^+ e R_0^-, respectivamente. Seja:

$$B_m = R^+ \bigcap [H_m^- \bigcup \Pi_m^-], \;\; m \geq 0.$$

Pela proposição 7:

$$\begin{aligned} S(B_m) &= S(R^+ \bigcap [H_m^- \bigcup \Pi_m^-]) = S(R^+) \bigcap S(H_m^- \bigcup \Pi_m^-) \\ &= R^+ \bigcap (H_{m+1}^- \bigcup \Pi_{m+1}^-) = B_{m+1}. \end{aligned}$$

Como S preserva a área, temos que B_m e B_{m+1} tem a mesma área, de onde $\mu(B_m) = \mu(B_n)$, para quaisquer $m, n \geq 0$.

Notemos agora que:

$$B_0 = R^+ \bigcap [H_0^- \bigcup \Pi_0^-] \subset H_0^- \bigcup \Pi_0^- \subset \Phi \backslash R_0^-$$

e, para $m \geq 1$:

$$B_m \subset H_m^- \bigcup \Pi_m^- \Rightarrow B_m \subset R_0^-,$$

o que nos dá:

$$B_0 \bigcap B_m = \emptyset, \text{ para } m \geq 1.$$

Portanto, para $k > m$, temos:

$$B_k \bigcap B_m = S(B_{k-1} \bigcap B_{m-1}) = S^m(B_{k-m} \bigcap B_0) = \emptyset. \tag{32}$$

Mas:

$$\begin{aligned} \bigcup_{m=0}^{\infty} B_m &= R^+ \bigcap [\bigcup_{m=0}^{\infty} (H_m^- \bigcup \Pi_m^-)] = R^+ \bigcap (H^- \bigcup \Pi^-) \\ &= R^+ \bigcap [\Phi \backslash (\{0\} \bigcup R^-)] = R^+ \backslash R^-. \end{aligned}$$

Então, utilizando (32):

$$\mu(R^+ \backslash R^-) = \mu(\bigcup_{m=0}^{\infty} B_m) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu(B_m).$$

Conforme já observamos, R^+ e R^- estão contidos em discos de raios finitos, ou seja, $\mu(R^+ \backslash R^-) < \infty$. Então $\sum_{m=0}^{\infty} \mu(B_m) < \infty$. Disso, como $\mu(B_m) = \mu(B_k)$, para quaisquer $m, k \geq 0$, devemos ter $\mu(B_m) = 0$, para qualquer $m \geq 0$, isto é, $\mu(R^+ \backslash R^-) = 0$. Analogamente, mostramos que $\mu(R^- \backslash R^+) = 0$.

$\blacksquare$

Referências

[1] V.M. Alekseev, *Quasirandom Dynamical Systems. II. One-dimensional Nonlinear Oscillations in a Field With Periodic Perturbation*, Mat. USSR Sb. 77(119):4 (1968), 505-560.

[2] Jürgen Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton University Press and University of Tokyo Press (1973)

[3] Anatole Katok e Boris Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press (1995)